

1. Нека је $0 < a \leq b < \infty$. Испитати за које p функција $f(x) = \frac{1}{x^a + x^b}$ припада простору $L^p(0, +\infty)$.
2. Нека је $f \in L^1[0, \pi]$ и $g(x) = |f(x)|^{\frac{3}{4}} \sqrt{\sin x}$, $x \in [0, \pi]$. Да ли је $g \in L^1[0, \pi]$? За које $f \in L^1[0, \pi]$, $\|f\|_1 = \frac{\pi}{2}$ важи да је $\|g\|_1 \leq \|f\|_1$?
3. а) Нека су x_1, x_2, \dots, x_n узајамно ортогонални вектори у Хилбертовом простору H . Доказати да важи једнакост $\|x_1 + \dots + x_n\|^2 = \|x_1\|^2 + \dots + \|x_n\|^2$.
б) Доказати да су вектори $x, y \neq 0$ узајамно ортогонални ако и само ако за произвољне скаларе $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ важи једнакост $\|\alpha x\|^2 + \|\beta y\|^2 = \|\alpha x + \beta y\|^2$.
4. Нека је M једнодимензионални потпростор Хилбертовог простора H и нека је $a \in M$, $a \neq 0$. Извести формулу за растојање произвољног вектора $x \in H$ од потпростора E^\perp .

1. Нека је $0 < a \leq b < \infty$. Испитати за које p функција $f(x) = \frac{1}{x^a + x^b}$ припада простору $L^p(0, +\infty)$.
2. Нека је $f \in L^1[0, \pi]$ и $g(x) = |f(x)|^{\frac{3}{4}} \sqrt{\sin x}$, $x \in [0, \pi]$. Да ли је $g \in L^1[0, \pi]$? За које $f \in L^1[0, \pi]$, $\|f\|_1 = \frac{\pi}{2}$ важи да је $\|g\|_1 \leq \|f\|_1$?
3. а) Нека су x_1, x_2, \dots, x_n узајамно ортогонални вектори у Хилбертовом простору H . Доказати да важи једнакост $\|x_1 + \dots + x_n\|^2 = \|x_1\|^2 + \dots + \|x_n\|^2$.
б) Доказати да су вектори $x, y \neq 0$ узајамно ортогонални ако и само ако за произвољне скаларе $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ важи једнакост $\|\alpha x\|^2 + \|\beta y\|^2 = \|\alpha x + \beta y\|^2$.
4. Нека је M једнодимензионални потпростор Хилбертовог простора H и нека је $a \in M$, $a \neq 0$. Извести формулу за растојање произвољног вектора $x \in H$ од потпростора E^\perp .

1. Нека је $0 < a \leq b < \infty$. Испитати за које p функција $f(x) = \frac{1}{x^a + x^b}$ припада простору $L^p(0, +\infty)$.
2. Нека је $f \in L^1[0, \pi]$ и $g(x) = |f(x)|^{\frac{3}{4}} \sqrt{\sin x}$, $x \in [0, \pi]$. Да ли је $g \in L^1[0, \pi]$? За које $f \in L^1[0, \pi]$, $\|f\|_1 = \frac{\pi}{2}$ важи да је $\|g\|_1 \leq \|f\|_1$?
3. а) Нека су x_1, x_2, \dots, x_n узајамно ортогонални вектори у Хилбертовом простору H . Доказати да важи једнакост $\|x_1 + \dots + x_n\|^2 = \|x_1\|^2 + \dots + \|x_n\|^2$.
б) Доказати да су вектори $x, y \neq 0$ узајамно ортогонални ако и само ако за произвољне скаларе $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ важи једнакост $\|\alpha x\|^2 + \|\beta y\|^2 = \|\alpha x + \beta y\|^2$.
4. Нека је M једнодимензионални потпростор Хилбертовог простора H и нека је $a \in M$, $a \neq 0$. Извести формулу за растојање произвољног вектора $x \in H$ од потпростора E^\perp .