

Анализа 4 - први колоквијум

1. Нека је на скупу природних бројева \mathbb{N} дато пресликавање:

$$d(m, n) = \begin{cases} \left| \frac{1}{2^m} - \frac{1}{2^n} \right| + 1, & m \neq n \\ 0, & m = n \end{cases}.$$

- (а) Доказати да је d метрика на \mathbb{N} .
(б) Нека је дат низ $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $x_n = n$. Да ли је овај низ конвергентан у (\mathbb{N}, d) ?
(в) Одредити све Кошијеве низове у (\mathbb{N}, d) . Да ли је (\mathbb{N}, d) комплетан?
(г) Показати да (\mathbb{N}, d) није компактан.
(д) Показати да (\mathbb{N}, d) није повезан.
2. Нека је на простору непрекидних функција $C[0, 1]$ са стандардном метриком дато пресликавање:

$$F(f)(x) = 3 \int_0^x t^3 f(t) dt.$$

Доказати да F има јединствену фиксну тачку.

3. Посматрајмо Кошијев проблем $x' = t - x$, $x(0) = 1$.

- (а) Рачунајући првих неколико чланова низа Пикарових итерација одредити решење Кошијевог проблема.
(б) Оправдати зашто низ Пикарових итерација конвергира ка решењу датог Кошијевог проблема.
(в) Решити експлицитно дати Кошијев проблем.

4. Решити систем диференцијалних једначина:

$$\begin{aligned} x_1' &= 2x_1 + 3x_2 \\ x_2' &= 4x_1 + 3x_2 \end{aligned}$$

и скицирати његов фазни портрет.

Анализа 4 - први колоквијум

1. Нека је на скупу природних бројева \mathbb{N} дато пресликавање:

$$d(m, n) = \begin{cases} \left| \frac{1}{2^m} - \frac{1}{2^n} \right| + 1, & m \neq n \\ 0, & m = n \end{cases}.$$

- (а) Доказати да је d метрика на \mathbb{N} .
(б) Нека је дат низ $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $x_n = n$. Да ли је овај низ конвергентан у (\mathbb{N}, d) ?
(в) Одредити све Кошијеве низове у (\mathbb{N}, d) . Да ли је (\mathbb{N}, d) комплетан?
(г) Показати да (\mathbb{N}, d) није компактан.
(д) Показати да (\mathbb{N}, d) није повезан.
2. Нека је на простору непрекидних функција $C[0, 1]$ са стандардном метриком дато пресликавање:

$$F(f)(x) = 3 \int_0^x t^3 f(t) dt.$$

Доказати да F има јединствену фиксну тачку.

3. Посматрајмо Кошијев проблем $x' = t - x$, $x(0) = 1$.

- (а) Рачунајући првих неколико чланова низа Пикарових итерација одредити решење Кошијевог проблема.
(б) Оправдати зашто низ Пикарових итерација конвергира ка решењу датог Кошијевог проблема.
(в) Решити експлицитно дати Кошијев проблем.

4. Решити систем диференцијалних једначина:

$$\begin{aligned} x_1' &= 2x_1 + 3x_2 \\ x_2' &= 4x_1 + 3x_2 \end{aligned}$$

и скицирати његов фазни портрет.