**Писмени испит из Анализе 1а, група 1, 11. јануар 2015.**

1. Дат је низ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$$a_n = \alpha\left(3-\frac{1}{n}\right)^{n^{(-1)^n}} + \sqrt[n]{2^{n(-1)^n}+6^{n(-1)^{n+1}}},\ \alpha\in\mathbb{R}.$$

а) Одредити тачке нагомилавања низа $(a_n)$ у зависности од $\alpha\in\mathbb{R}$.
б) Да ли је низ $(a_n)$ ограничен?
в) Да ли постоји $\alpha\in\mathbb{R}$ за које низ $(a_n)$ конвергира?

2. Нека је $f(x)=\dfrac{1+ax^2}{1+bx^2}$ и $g(x)=\cos x - f(x)$. Одредити $a$ и $b$ тако да је функција $g$
а) бесконачно мала поретка $o(x^2)$ ,
б) бесконачно мала највишег могућег поретка,
када $x\to 0$.

3. Испитати ток и скицирати график функције $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{2x}{x^2-1}-\dfrac{1}{|x|}$.

4. Нека је $f(x)=\dfrac{x^p}{p}$, $x>0$ и $p>1$.
а) Написати једначину тангенте у тачки $(x_0,f(x_0))$ у облику $y=kx+n$.
б) У каквом су односу вредност линеарне функције у делу а) и вредност функције $f$, у произвољној тачки $x>0$?
в) Показати да је

$$kx\le\frac{k^q}{q}+\frac{x^p}{p},\ x>0$$

ако је $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$.

**Писмени испит из Анализе 1а, група 2, 11. јануар 2015.**

1. Дат је низ $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$$a_n = \alpha\left(3-\frac{1}{n}\right)^{n^{(-1)^n}} + \sqrt[n]{3^{n(-1)^n}+5^{n(-1)^{n+1}}},\ \alpha\in\mathbb{R}.$$

а) Одредити тачке нагомилавања низа $(b_n)$ у зависности од $\alpha\in\mathbb{R}$.
б) Да ли је низ $(a_n)$ ограничен?
в) Да ли постоји $\alpha\in\mathbb{R}$ за које низ $(b_n)$ конвергира?

2. Нека је $f(x)=\dfrac{1+\alpha x^2}{1+\beta x^2}$ и $g(x)=1+x\sin x - f(x)$. Одредити $\alpha$ и $\beta$ тако да је функција $g$
а) бесконачно мала поретка $o(x^2)$ ,
б) бесконачно мала највишег могућег поретка,
када $x\to 0$.

3. Испитати ток и скицирати график функције $f(x)=\dfrac{1}{|x|}-\operatorname{arctg}\dfrac{2x}{x^2-1}$.

4. Нека је $f(x)=\dfrac{x^p}{p}$, $x>0$ и $p>1$.
а) Написати једначину тангенте у тачки $(x_0,f(x_0))$ у облику $y=kx+n$.
б) Да ли је функција $f$ конвексна на $(0,+\infty)$? У каквом су односу вредност линеарне функције у делу а) и вредност функције $f$, у произвољној тачки $x>0$?
в) Показати да је

$$kx\le\frac{k^q}{q}+\frac{x^p}{p},\ x>0$$

ако је $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$.