ТМИ - први колоквијум **18.04.2015.**

1. Нека је $X = \{1,2,3,4\}$, $Y = \{a,b,c,d\}$, $f : X \to Y$, $f(1) = a$, $f(2) = f(3) = b$, $f(4) = c$ и $\mathfrak{M} = \{\emptyset, \{1,2\}, \{3,4\}, X\}$. Проверити да ли су фамилије $\mathfrak{M}$ и $f(\mathfrak{M}) = \{f(A) \mid A \in \mathfrak{M}\}$ σ-алгебре.

2. а) Нека је μ нека мера на некој σ-алгебри $\mathfrak{M}$. Доказати да за A, $B \in \mathfrak{M}$ важи једнакост $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$;

б) Нека је m Лебегова мера (на $\mathbf{R}$), и нека су A, $B \subseteq [0,1]$ мерљиви скупови са својством $m(A) + m(B) > 1$. Доказати да скуп $A \cap B$ није празан.

3. Дата је функција $f : [0,1] \to \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \notin \mathbf{Q}, 0 \le x \le 1/2 \\ x^3, & x \notin \mathbf{Q}, 1/2 < x \le 1 \\ 7, & x \in \mathbf{Q}, 0 \le x \le 1 \end{cases}$. Израчунати $\int_{[0,1]} f(x)\,\mathrm{d}m(x)$, где је m ознака за Лебегову меру.

4. Нека је $\mu : \mathcal{P}(\mathbf{R}) \to [0,+\infty)$ задата са $\mu(A) = \begin{cases} 0, & 1 \notin A \\ 1, & 1 \in A \end{cases}$.

а) Доказати да је μ мера;

б) Израчунати $\mu((1,2))$, $\mu([0,1])$ и $\mu(C)$, где је C ознака за Канторов скуп;

в) Израчунати $\int_A f\,\mathrm{d}\mu$, где је $A = [1,3]$ и $f(x) = \begin{cases} 1, & 1 \le x \le 2 \\ 2, & 2 < x \le 3 \end{cases}$;

г) Да ли је функција $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in (-\infty,1) \cup (2,+\infty) \\ -10, & x = 1 \\ -15, & 1 < x \le 2 \end{cases}$ позитивна μ-скоро свуда?

д) Да ли је мера μ транслаторно инваријантна?

5. Да ли је функција $f(x) = \dfrac{\sin x}{1+x^2}$ Лебег интеграбилна на $[0,+\infty)$?

6. Израчунати граничне вредности: $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 \dfrac{nx^2}{1+n^2x^3}\,\mathrm{d}x$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{e^{-(x+n)^2}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

ТМИ - први колоквијум **18.04.2015.**

1. Нека је $X = \{1,2,3,4\}$, $Y = \{a,b,c,d\}$, $f : X \to Y$, $f(1) = a$, $f(2) = f(3) = b$, $f(4) = c$ и $\mathfrak{M} = \{\emptyset, \{1,2\}, \{3,4\}, X\}$. Проверити да ли су фамилије $\mathfrak{M}$ и $f(\mathfrak{M}) = \{f(A) \mid A \in \mathfrak{M}\}$ σ-алгебре.

2. а) Нека је μ нека мера на некој σ-алгебри $\mathfrak{M}$. Доказати да за A, $B \in \mathfrak{M}$ важи једнакост $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$;

б) Нека је m Лебегова мера (на $\mathbf{R}$), и нека су A, $B \subseteq [0,1]$ мерљиви скупови са својством $m(A) + m(B) > 1$. Доказати да скуп $A \cap B$ није празан.

3. Дата је функција $f : [0,1] \to \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \notin \mathbf{Q}, 0 \le x \le 1/2 \\ x^3, & x \notin \mathbf{Q}, 1/2 < x \le 1 \\ 7, & x \in \mathbf{Q}, 0 \le x \le 1 \end{cases}$. Израчунати $\int_{[0,1]} f(x)\,\mathrm{d}m(x)$, где је m ознака за Лебегову меру.

4. Нека је $\mu : \mathcal{P}(\mathbf{R}) \to [0,+\infty)$ задата са $\mu(A) = \begin{cases} 0, & 1 \notin A \\ 1, & 1 \in A \end{cases}$.

а) Доказати да је μ мера;

б) Израчунати $\mu((1,2))$, $\mu([0,1])$ и $\mu(C)$, где је C ознака за Канторов скуп;

в) Израчунати $\int_A f\,\mathrm{d}\mu$, где је $A = [1,3]$ и $f(x) = \begin{cases} 1, & 1 \le x \le 2 \\ 2, & 2 < x \le 3 \end{cases}$;

г) Да ли је функција $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in (-\infty,1) \cup (2,+\infty) \\ -10, & x = 1 \\ -15, & 1 < x \le 2 \end{cases}$ позитивна μ-скоро свуда?

д) Да ли је мера μ транслаторно инваријантна?

5. Да ли је функција $f(x) = \dfrac{\sin x}{1+x^2}$ Лебег интеграбилна на $[0,+\infty)$?

6. Израчунати граничне вредности: $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 \dfrac{nx^2}{1+n^2x^3}\,\mathrm{d}x$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{e^{-(x+n)^2}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.