ТМИ - ЈУН **5.7.2014.**

1. Нека је $\mathfrak{M}$ σ - алгебра на $\mathbb{R}$ и μ мера на $\mathfrak{M}$ таква да је $\mu(\mathbb{R}) = 1$. За $s \geqslant 0$ дефинишемо $\nu_s(E) = \int\limits_E |x|^s \mathrm{d}\mu(x)$ за све $E \in \mathfrak{M}$.

а) Доказати да је ν_s мера на $\mathfrak{M}$.

б) Нека је $s \leqslant t$. Доказати да ако је $\nu_t(E) = 0$, онда је $\nu_s(E) = 0$.

2. Израчунати $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^1 \frac{\ln(x+n)e^{-x}\cos x}{n}\mathrm{d}x$.

3. Испитати за које p, $1 \leqslant p < \infty$, функција $f(x) = \frac{1}{x - \sin x}$ припада простору $L^p(0,1)$ и простору $L^p(1,+\infty)$.

4. Нека је $H = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} \mid f$ је мерљива, $\int\limits_0^1 |f(t)|^2\sqrt{1-t^2}\mathrm{d}t < +\infty\}$ и нека је $\langle f, g\rangle = \int\limits_0^1 f(t)\overline{g(t)}\sqrt{1-t^2}\mathrm{d}t$.

а) Доказати да је са $(f,g) \mapsto \langle f, g\rangle$ задат један скаларни производ.

б) Одредити угао између $f(t) = 1$ и $g(t) = t$.

ТМИ - ЈУН **5.7.2014.**

1. Нека је $\mathfrak{M}$ σ - алгебра на $\mathbb{R}$ и μ мера на $\mathfrak{M}$ таква да је $\mu(\mathbb{R}) = 1$. За $s \geqslant 0$ дефинишемо $\nu_s(E) = \int\limits_E |x|^s \mathrm{d}\mu(x)$ за све $E \in \mathfrak{M}$.

а) Доказати да је ν_s мера на $\mathfrak{M}$.

б) Нека је $s \leqslant t$. Доказати да ако је $\nu_t(E) = 0$, онда је $\nu_s(E) = 0$.

2. Израчунати $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^1 \frac{\ln(x+n)e^{-x}\cos x}{n}\mathrm{d}x$.

3. Испитати за које p, $1 \leqslant p < \infty$, функција $f(x) = \frac{1}{x - \sin x}$ припада простору $L^p(0,1)$ и простору $L^p(1,+\infty)$.

4. Нека је $H = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} \mid f$ је мерљива, $\int\limits_0^1 |f(t)|^2\sqrt{1-t^2}\mathrm{d}t < +\infty\}$ и нека је $\langle f, g\rangle = \int\limits_0^1 f(t)\overline{g(t)}\sqrt{1-t^2}\mathrm{d}t$.

а) Доказати да је са $(f,g) \mapsto \langle f, g\rangle$ задат један скаларни производ.

б) Одредити угао између $f(t) = 1$ и $g(t) = t$.

ТМИ - ЈУН **5.7.2014.**

1. Нека је $\mathfrak{M}$ σ - алгебра на $\mathbb{R}$ и μ мера на $\mathfrak{M}$ таква да је $\mu(\mathbb{R}) = 1$. За $s \geqslant 0$ дефинишемо $\nu_s(E) = \int\limits_E |x|^s \mathrm{d}\mu(x)$ за све $E \in \mathfrak{M}$.

а) Доказати да је ν_s мера на $\mathfrak{M}$.

б) Нека је $s \leqslant t$. Доказати да ако је $\nu_t(E) = 0$, онда је $\nu_s(E) = 0$.

2. Израчунати $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^1 \frac{\ln(x+n)e^{-x}\cos x}{n}\mathrm{d}x$.

3. Испитати за које p, $1 \leqslant p < \infty$, функција $f(x) = \frac{1}{x - \sin x}$ припада простору $L^p(0,1)$ и простору $L^p(1,+\infty)$.

4. Нека је $H = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} \mid f$ је мерљива, $\int\limits_0^1 |f(t)|^2\sqrt{1-t^2}\mathrm{d}t < +\infty\}$ и нека је $\langle f, g\rangle = \int\limits_0^1 f(t)\overline{g(t)}\sqrt{1-t^2}\mathrm{d}t$.

а) Доказати да је са $(f,g) \mapsto \langle f, g\rangle$ задат један скаларни производ.

б) Одредити угао између $f(t) = 1$ и $g(t) = t$.