ТМИ - Други колоквијум

1. Нека $f,\, g \in L^{2p}(\mathbb{R})$ за неко $p > 1$. Доказати да $f \cdot g \in L^p(\mathbb{R})$.

2. **а)** Навести пример скупа $E \subseteq \mathbb{R}$ и функције $f : E \to \mathbb{R}$ која припада простору $L^3(E)$, а не припада простору $L^1(E)$;

б) Да ли се скуп E може одабрати тако да буде $m(E) < +\infty$?

3. **а)** Нека је (X, μ) простор са мером и нека је $\mu(X) < +\infty$. Ако за низ функција $f_n \in L^1(X, \mu)$ важи $f_n \rightrightarrows f$ (тј. f_n равномерно конвергира ка f), доказати да $f \in L^1(X, \mu)$ takође, као и да је $\lim\limits_{n\to+\infty} ||f_n - f|| = 0$;

б) Да ли претодно важи, ако се изостави услов $\mu(X) < +\infty$? [Упутство: посматрати низ $f_n(x) = n/(x^2 + n^2)$ на скупу $(0, +\infty)$ са Лебеговом мером.]

4. Нека је $f \in L^p(X, \mu)$.

а) Доказати да је мера скупа $\{x \in X \mid |f(x)| \geqslant \eta\}$ мања или једнака од $\dfrac{1}{\eta^p} \int_X |f|^p \mathrm{d}\mu$;

б) Користећи се претходним (или другачије) показати да је скуп $\{x \in X \mid f(x) \neq 0\}$ σ-коначан, тј. да се може приказати као највише пребројива унија скупова коначне мере.

5. Нека су $u,\, v \in H$, H - Хилбертов простор, и нека је $||u|| = 3$, $||u - v|| = 7$, $||u + v|| = 1$. Одредити $||v||$.

6. Нека $u,\, v \in H$, H - Хилбертов простор, и нека је $\hat{u} = u/||u||^2$, $\hat{v} = v/||v||^2$. Доказати да је $||\hat{u} - \hat{v}|| = \dfrac{||u - v||}{||u|| \cdot ||v||}$.

7. **Џокер задатак.** [може заменити било која два] Нека је λ комплексна мера на σ-алгебри $\mathfrak{M}$ над X, и нека је $|\lambda|$ њена тотална варијација. Доказати да је $\lambda \ll |\lambda|$. Доказати да је $|\lambda|$ мера скупа $\{x \in X \mid |f(x)| \neq 1\}$ једнака нули, ако је $f = \dfrac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}|\lambda|}$ - Радон Никодимов извод мере λ по мери $|\lambda|$.

ТМИ - Други колоквијум

1. Нека $f,\, g \in L^{2p}(\mathbb{R})$ за неко $p > 1$. Доказати да $f \cdot g \in L^p(\mathbb{R})$.

2. **а)** Навести пример скупа $E \subseteq \mathbb{R}$ и функције $f : E \to \mathbb{R}$ која припада простору $L^3(E)$, а не припада простору $L^1(E)$;

б) Да ли се скуп E може одабрати тако да буде $m(E) < +\infty$?

3. **а)** Нека је (X, μ) простор са мером и нека је $\mu(X) < +\infty$. Ако за низ функција $f_n \in L^1(X, \mu)$ важи $f_n \rightrightarrows f$ (тј. f_n равномерно конвергира ка f), доказати да $f \in L^1(X, \mu)$ takође, као и да је $\lim\limits_{n\to+\infty} ||f_n - f|| = 0$;

б) Да ли претодно важи, ако се изостави услов $\mu(X) < +\infty$? [Упутство: посматрати низ $f_n(x) = n/(x^2 + n^2)$ на скупу $(0, +\infty)$ са Лебеговом мером.]

4. Нека је $f \in L^p(X, \mu)$.

а) Доказати да је мера скупа $\{x \in X \mid |f(x)| \geqslant \eta\}$ мања или једнака од $\dfrac{1}{\eta^p} \int_X |f|^p \mathrm{d}\mu$;

б) Користећи се претходним (или другачије) показати да је скуп $\{x \in X \mid f(x) \neq 0\}$ σ-коначан, тј. да се може приказати као највише пребројива унија скупова коначне мере.

5. Нека су $u,\, v \in H$, H - Хилбертов простор, и нека је $||u|| = 3$, $||u - v|| = 7$, $||u + v|| = 1$. Одредити $||v||$.

6. Нека $u,\, v \in H$, H - Хилбертов простор, и нека је $\hat{u} = u/||u||^2$, $\hat{v} = v/||v||^2$. Доказати да је $||\hat{u} - \hat{v}|| = \dfrac{||u - v||}{||u|| \cdot ||v||}$.

7. **Џокер задатак.** [може заменити било која два] Нека је λ комплексна мера на σ-алгебри $\mathfrak{M}$ над X, и нека је $|\lambda|$ њена тотална варијација. Доказати да је $\lambda \ll |\lambda|$. Доказати да је $|\lambda|$ мера скупа $\{x \in X \mid |f(x)| \neq 1\}$ једнака нули, ако је $f = \dfrac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}|\lambda|}$ - Радон Никодимов извод мере λ по мери $|\lambda|$.