Писмени испит из Анализе 1а, 14. јун 2015.

1. Дат је низ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$
$$a_1 = 1, a_{n+1} = (1 + \frac{1}{2^n})a_n.$$
а) Доказати да је $a_n \leq (\frac{n+1}{n})^n$. б) Доказати да је $|a_{n+1} - a_n| \leq \frac{e}{2^n}$. в) Да ли низ (a_n) конвергира?

2. Испитати ток и скицирати график функције $f(x) = (x-1)e^{\frac{x^2-2x}{2x^2-4x+2}}$.

3. Нека су $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ непрекидне на $[a, b]$ и диференцијалне на (a, b) и нека је $g'(x) \neq 0$ за свако $x \in (a, b)$. Ако постоји $\alpha \in \mathbb{R}$ за које је $|f'(x)| \leq \alpha|g'(x)|$ за свако $x \in (a, b)$ доказати да је $|f(b)-f(a)| \leq \alpha|g(b)-g(a)|$.

4. Испитати равномерну непрекидност функције $f(x) = x^{\frac{3}{2}} \sin\frac{1}{x}$ на интервалу
а) $(0, 1)$ б)$(0, \infty)$
в) Да ли постоји $M > 0$ за које је $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$ за свако $x, y \in (0, 1)$?

Писмени испит из Анализе 1а, 14. јун 2015.

1. Дат је низ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$
$$a_1 = 1, a_{n+1} = (1 + \frac{1}{2^n})a_n.$$
а) Доказати да је $a_n \leq (\frac{n+1}{n})^n$. б) Доказати да је $|a_{n+1} - a_n| \leq \frac{e}{2^n}$. в) Да ли низ (a_n) конвергира?

2. Испитати ток и скицирати график функције $f(x) = (x-1)e^{\frac{x^2-2x}{2x^2-4x+2}}$.

3. Нека су $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ непрекидне на $[a, b]$ и диференцијалне на (a, b) и нека је $g'(x) \neq 0$ за свако $x \in (a, b)$. Ако постоји $\alpha \in \mathbb{R}$ за које је $|f'(x)| \leq \alpha|g'(x)|$ за свако $x \in (a, b)$ доказати да је $|f(b)-f(a)| \leq \alpha|g(b)-g(a)|$.

4. Испитати равномерну непрекидност функције $f(x) = x^{\frac{3}{2}} \sin\frac{1}{x}$ на интервалу
а) $(0, 1)$ б)$(0, \infty)$
в) Да ли постоји $M > 0$ за које је $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$ за свако $x, y \in (0, 1)$?

Писмени испит из Анализе 1а, 14. јун 2015.

1. Дат је низ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$
$$a_1 = 1, a_{n+1} = (1 + \frac{1}{2^n})a_n.$$
а) Доказати да је $a_n \leq (\frac{n+1}{n})^n$. б) Доказати да је $|a_{n+1} - a_n| \leq \frac{e}{2^n}$. в) Да ли низ (a_n) конвергира?

2. Испитати ток и скицирати график функције $f(x) = (x-1)e^{\frac{x^2-2x}{2x^2-4x+2}}$.

3. Нека су $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ непрекидне на $[a, b]$ и диференцијалне на (a, b) и нека је $g'(x) \neq 0$ за свако $x \in (a, b)$. Ако постоји $\alpha \in \mathbb{R}$ за које је $|f'(x)| \leq \alpha|g'(x)|$ за свако $x \in (a, b)$ доказати да је $|f(b)-f(a)| \leq \alpha|g(b)-g(a)|$.

4. Испитати равномерну непрекидност функције $f(x) = x^{\frac{3}{2}} \sin\frac{1}{x}$ на интервалу
а) $(0, 1)$ б)$(0, \infty)$
в) Да ли постоји $M > 0$ за које је $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$ за свако $x, y \in (0, 1)$?

Писмени испит из Анализе 1а, 14. јун 2015.

1. Дат је низ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$
$$a_1 = 1, a_{n+1} = (1 + \frac{1}{2^n})a_n.$$
а) Доказати да је $a_n \leq (\frac{n+1}{n})^n$. б) Доказати да је $|a_{n+1} - a_n| \leq \frac{e}{2^n}$. в) Да ли низ (a_n) конвергира?

2. Испитати ток и скицирати график функције $f(x) = (x-1)e^{\frac{x^2-2x}{2x^2-4x+2}}$.

3. Нека су $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ непрекидне на $[a, b]$ и диференцијалне на (a, b) и нека је $g'(x) \neq 0$ за свако $x \in (a, b)$. Ако постоји $\alpha \in \mathbb{R}$ за које је $|f'(x)| \leq \alpha|g'(x)|$ за свако $x \in (a, b)$ доказати да је $|f(b)-f(a)| \leq \alpha|g(b)-g(a)|$.

4. Испитати равномерну непрекидност функције $f(x) = x^{\frac{3}{2}} \sin\frac{1}{x}$ на интервалу
а) $(0, 1)$ б)$(0, \infty)$
в) Да ли постоји $M > 0$ за које је $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$ за свако $x, y \in (0, 1)$?