

1. Низ $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ дефинисан је на следећи начин:

$$a_n = \sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt{n^2 + 1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

(а) Одредити $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$.

(б) Одредити $\sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.

(в) Одредити

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n + qa_{n-1} + q^2 a_{n-2} + \dots + q^{n-1} a_1)$$

при чему константа q задовољава неједнакост $|q| < 1$.

2. Нека је дата функција

$$f(x) = e^x + \cos \frac{\pi}{x^2 + 3}.$$

Низ $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ дефинишемо на следећи начин

$$a_{n+1} = f(a_n), \quad n \in \mathbb{N}$$

при чему је $a_1 \in \mathbb{R}$ произвољна константа.

(а) Показати да важи $f(x) \geq x + 1$ за све $x \in \mathbb{R}$.

(б) Показати да је низ a_n монотон.

(в) Да ли је низ a_n ограничен?

3. Функција $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ дефинисана је на следећи начин:

$$f(x) = \begin{cases} e^{4x}, & x \leq \frac{1}{4}, \\ ax + b, & \frac{1}{4} < x < 1, \\ (x+1)e^{\frac{\pi}{4 \arctan x}}, & x \geq 1. \end{cases}$$

(а) Одредити све вредности константи a и b за које је функција f непрекидна на свом домену.

(б) Наћи, за тако одређене вредности константи, све тачке скупа \mathbb{R} у којима је функција f диференцијабилна.

(в) Наћи, за тако одређене вредности константи, асимптоте функције f на њеном домену.

(г) Да ли је, за тако одређене вредности константи, функција f монотона на интервалу $(-\infty, \frac{1}{2})$?

(д) Да ли постоји, за тако одређене вредности константи, околина тачке $x = \frac{1}{4}$ на којој је функција f конвексна?

4. Нека је $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ диференцијабилна функција која има ограничен извод на \mathbb{R} . Дефинишемо функцију $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ на следећи начин:

$$g(x) = x^2 + f(x).$$

(а) Одредити $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ и $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{\sqrt{1+x^4}}$.

(б) Да ли је функција g равномерно непрекидна на скупу \mathbb{R} ?