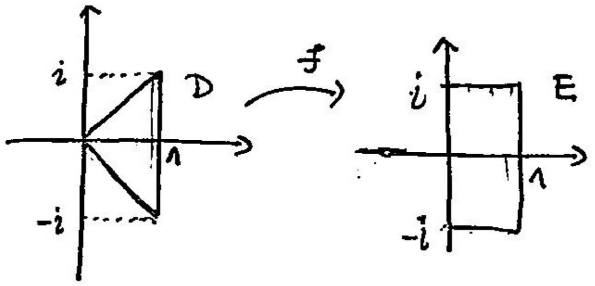
(1) Нека је $D=\{z\in\mathbb{C} : 0<\operatorname{Re} z<1, -\operatorname{Re} z<\operatorname{Im} z<\operatorname{Re} z\}$ и нека је $E=\{w\in\mathbb{C} : 0<\operatorname{Re} w<1, -1<\operatorname{Im} w<1\}$. Показати да је фја $f:D\to E$ дата са $f(z)=\operatorname{Re} z+i\cdot\frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z}$ дифеоморфизам, али да није квазиконформно пресликавање.



$f(z)=x+i\cdot\frac{y}{x}$, $z=x+iy$

$u(x,y)=x$

$v(x,y)=\frac{y}{x}$

$u_x=1$ $u_y=0$, $v_x=\frac{-y}{x^2}$, $v_y=\frac{1}{x}$

$\exists\, u_x, u_y$ непрекидни на D

$\Rightarrow$ u је диференцијабилна на D

$\exists\, v_x, v_y$ непрекидни на D

$\Rightarrow$ v је диф. на D

Дакле, онда је и f диференцијабилна на D

u и v су класе C^1, па је и f!

$df(x,y)=\begin{bmatrix}1 & 0\\ \frac{-y}{x^2} & \frac{1}{x}\end{bmatrix}$

Нађимо f^{-1}:

$w=f(z)=x+i\frac{y}{x}$

$w=u+iv$

$u=x$, $v=\frac{y}{x}$

$x=u$, $y=uv$

$f^{-1}(w)=u+iuv$, $w=u+iv$

$X(u,v)=u$

$Y(u,v)=uv$

$X_u=1$, $X_v=0$

$Y_u=v$, $Y_v=u$

$$\left.\begin{aligned}&\exists\, X_u, X_v \text{ непр. на } E \Rightarrow X \text{ је диф на } E\\ &\exists\, Y_u, Y_v \text{ непр на } E \Rightarrow Y \text{ је диф на } E\end{aligned}\right\}\Rightarrow f^{-1} \text{ је диференц на } E$$

X, Y класе C^1

$\Rightarrow$ f^{-1} класе C^1

$df^{-1}(u,v)=\begin{bmatrix}1 & 0\\ v & u\end{bmatrix}$

Дакле, f је дифеоморфизам.

$$D_f(z)=\frac{|f_z|+|f_{\bar z}|}{|f_z|-|f_{\bar z}|}$$

$$f_z=\frac{1}{2}(f_x-if_y)=\frac{1}{2}\left(1-i\frac{y}{x^2}-i\left(\frac{i}{x}\right)\right)=\frac{1}{2}\left(1-i\frac{y}{x^2}+\frac{1}{x}\right)$$

$$f_{\bar z}=\frac{1}{2}(f_x+if_y)=\frac{1}{2}\left(1-i\frac{y}{x^2}-\frac{1}{x}\right)$$

$$|f_z| = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{\left(1+\frac{1}{x}\right)^2 + \left(\frac{y}{x^2}\right)^2} = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{(x+1)^2}{x^2} + \frac{y^2}{x^4}} = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{x^2(x+1)^2+y^2}{x^4}}$$

$$|f_{\bar z}| = \frac{1}{2}\sqrt{\left(1-\frac{1}{x}\right)^2 + \left(\frac{y}{x^2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(x-1)^2}{x^2} + \frac{y^2}{x^4}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x^2(x-1)^2+y^2}{x^4}}$$

$$D_f(z) = \frac{1+\left|\frac{f_{\bar z}}{f_z}\right|}{1-\left|\frac{f_{\bar z}}{f_z}\right|}$$

$$|\mu_f| = \frac{|f_{\bar z}|}{|f_z|} = \frac{\sqrt{x^2(x-1)^2+y^2}}{\sqrt{x^2(x+1)^2+y^2}}$$

за $y=0$ је $|\mu_f(x,0)| = \left|\frac{x-1}{x+1}\right|$

$$D_f(x,0) = \frac{1+\left|\frac{x-1}{x+1}\right|}{1-\left|\frac{x-1}{x+1}\right|} = \frac{|x+1|+|x-1|}{|x+1|-|x-1|} =$$

$0<x<1$ $\quad x-1<0$

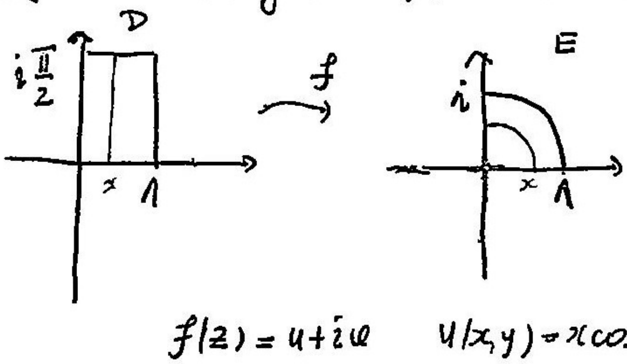
$$D_f(x,0) = \frac{x+1+1-x}{x+1-1+x} = \frac{2}{2x} = \frac{1}{x}$$

за x „мало" је $D_f(x,0)$ „велико"!

$\lim\limits_{x\to 0+} D_f(x,0) = \infty$ па је D_f неограничено на D

$\Rightarrow$ f није квазиконформно.

(2) Нека је $D=\{z=x+iy : 0<x<1,\ 0<y<\frac{\pi}{2}\}$ и нека је $E=\{w=u+iv : 0<u^2+v^2<1,\ u,v>0\}$. Показати да је фја $f: D\to E$ дата са $f(z)=x\cdot e^{iy}$ (где $z=x+iy$) дифеоморфизам, али да није квазиконформно.



$f(z) = x\cos y + x\cdot\sin y\cdot i$

$|f(z)| = x$

$f(z) = u+iv \qquad u(x,y) = x\cos y,\ v(x,y) = x\sin y$

$u_x = \cos y,\ u_y = -x\sin y,\ v_x = \sin y,\ v_y = x\cos y$

u_x, u_y, v_x, v_y непр на D $\Rightarrow$ f је диф. на D

$$df(x,y) = \begin{bmatrix} \cos y & -x\sin y \\ \sin y & x\cos y \end{bmatrix}$$

$f^{-1}(w) = z = x + iy$

$w = u + iv$

$u^2 + v^2 = x^2$

$x = \sqrt{u^2+v^2}$

$\frac{v}{u} = tg\, y$

$y = arctg \frac{v}{u}$ јер $\frac{v}{u} > 0$, $y \in (0, \frac{\pi}{2})$

$\Rightarrow f^{-1}(u,v) = \sqrt{u^2+v^2} + i \cdot arctg \frac{v}{u}$

$X(u,v) = \sqrt{u^2+v^2}$ $\qquad X_u = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}} \cdot 2u = \frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}}$

$Y(u,v) = arctg \frac{v}{u}$

$Y_u = \frac{1}{1+\frac{v^2}{u^2}} \cdot \frac{-v}{u^2} = \frac{-v}{u^2+v^2}$

$X_v = \frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}}$, $\quad Y_v = \frac{1}{1+\frac{v^2}{u^2}} \cdot \frac{1}{u} = \frac{u}{u^2+v^2}$

X_u, X_v, Y_u, Y_v непр на E

$\Rightarrow f^{-1}$ је диф. на E

$$df^{-1}(u,v) = \begin{bmatrix} \frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}} & \frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}} \\ \frac{-v}{u^2+v^2} & \frac{u}{u^2+v^2} \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow f$ је дифеоморфизам

$D_f(z) = \frac{|f_z| + |f_{\bar z}|}{|f_z| - |f_{\bar z}|} = \frac{1+|\mu_f|}{1-|\mu_f|}$, $\quad \mu_f = \frac{f_{\bar z}}{f_z}$

$f_z = \frac{1}{2}(f_x - i f_y) = \frac{1}{2}(\cos y + i \sin y - i(-x\sin y + ix\cos y))$

$= \frac{1}{2}(\cos y + i\sin y + ix\sin y + x\cos y)$

$= \frac{1}{2}(\cos y(1+x) + i(1+x)\sin y) = \frac{1}{2}(1+x)e^{iy}$

$f_{\bar z} = \frac{1}{2}(f_x + i f_y) = \frac{1}{2}(\cos y + i\sin y - ix\sin y - x\cos y)$

$= \frac{1}{2}(1-x) \cdot e^{iy}$

$\Rightarrow \mu_f = \frac{1-x}{1+x}$ $\qquad |\mu_f| = \frac{1-x}{1+x}$ јер $x < 1$

$\Rightarrow D_f = \frac{1+\frac{1-x}{x+1}}{1-\frac{1-x}{x+1}} = \frac{x+1+1-x}{x+1-1+x} = \frac{2}{2x} = \frac{1}{x}$

$\lim\limits_{x \to 0^+} D_f(x) = \infty$

$\Rightarrow f$ није квазиконформно