Узорачке расподеле. Статистике поретка

Задатак 1. Испитати да ли су следеће фамилије експоненцијалне фамилије расподела:

а) бета $\beta(a,b)$, када је a познато, када је b познато и када су оба параметра непозната;

б) негативна биномна $\mathcal{NB}(m,p),\ p \in (0,1)$, када је m познато и када су оба параметра непозната.

Задатак 2. Нека расподела узорка $\mathbf{X}_n,\ n=1$, припада експоненцијалној фамилији расподела са густином $f(x;\theta) = e^{c(\theta)T(x)+S(x)-d(\theta)}$. Показати да је $ET(X) = \frac{d'(\theta)}{c'(\theta)}$. Израчунати и $DT(X)$.

Задатак 3. Користећи резултате из 2. задатка, одредити очекивање и дисперзију негативне биномне $\mathcal{NB}(m,p),\ m \in \mathbb{N},\ p \in (0,1)$, расподеле.

Задатак 4. Нека случајна величина X има кошијеву $\mathcal{C}(\mu,\sigma)$ расподелу са густином

$$f(x;\mu,\sigma^2) = \frac{1}{\sigma\pi\left(1+\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right)},\ x \in \mathbb{R}.$$

Показати да

а) параметар μ је медијана расподеле X;

б) параметри $\mu-\sigma$ и $\mu+\sigma$ су први и трећи квартили расподеле од X.

Задатак 5. Нека је $\mathbf{X}_n$ узорак из расподеле с густином $f(x)$ и функцијом расподеле $F(x)$. Наћи густину статистике $X_{(j)}$, у општем случају, као и за $j=1$ и $j=n$.

Задатак 6. Нека је $\mathbf{X}_n$ узорак из расподеле са густином $f(x)$, функцијом расподеле $F(x)$ и медијаном μ. Ако је n непаран број, доказати да $X_{(\frac{n+1}{2})}$ има асимптотски нормалну $\mathcal{N}(\mu, \frac{1}{4nf^2(\mu)})$ расподелу.

Задатак 7. Седморица риболоваца независно један од другог пецају рибу. Време за које сваки од њих упеца рибу има експоненцијалну расподелу чија је средња вредност 23 минута. Израчунати вероватноћу да трећа риба буде ухваћена пре петнаестог минута.

Задатак 8. Нека је $\mathbf{X}_5$ узорак из униформне $\mathcal{U}[0,1]$ расподеле. Израчунати средњу вредност и дисперзију статистике $X_{(2)}$.

Задатак 9. Обележје X има густину $f(x),\ x \in [a,b]$. Извучен је узорак обима 3. Израчунати $P\{X_{(2)} \geq \mu\}$, где је μ медијана дате расподеле.

Задатак 10. Из популације чије обележје X има Кошијеву расподелу са густином $f(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2},\ x \in \mathbb{R}$, извучен је узорак обима 1001. Израчунати $P\left\{-0.1 < X_{(501)} < 0.1\right\}$, као и $P\left\{-0.1 < \overline{X}_{1001} < 0.1\right\}$ и упоредити ове две статистике као оцене средине Кошијеве расподеле (у овом случају нуле).

Задатак 11. За узорак обима n из нормалне $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$ расподеле упоредити оцене $\overline{X}_n$ и $X_{(\frac{n+1}{2})}$ параметра m.

Задатак 12. Дат је узорак обима 349 из расподеле с густином $f(x) = 2x,\ x \in (0,1)$. Израчунати $P\left\{X_{(175)} < \frac{3}{4}\right\}$.

Задатак 13. Нека је $\mathbf{X}_n$ узорак из расподеле с густином $f(x)$ и функцијом расподеле $F(x)$. Наћи заједничку густину $X_{(i)}, X_{(j)}$.

Задатак 14. Из популације чије обележје X има густину $f(x) = 2x,\ x \in [0,1]$, извучен је узорак обима 3.

а) Израчунати $P\left\{X_{(1)} > \mu\right\}$, као и $P\left\{X_{(3)} < \frac{1}{2}\right\}$, где је μ медијана дате расподеле.

б) Показати да су статистике $Y_1 = \frac{X_{(1)}}{X_{(2)}}$, $Y_2 = \frac{X_{(2)}}{X_{(3)}}$ и $Y_3 = X_{(3)}$ независне као тројка.

Задатак 15. Нека је (X_1, X_2) узорак из експоненцијалне $\mathcal{E}(1)$ расподеле. Доказати да су статистике $Y_1 = X_1 + X_2$ и $Y_2 = \frac{X_1}{X_1+X_2}$ независне.

Задатак 16. Нека је $\mathbf{X}_n$ узорак из униформне $\mathcal{U}[0,1]$ расподеле. Наћи расподелу статистике D, где је $D = X_{(j+1)} - X_{(j)},\ j = 1, ..., n-1$. Одредити и асимптотску расподелу за $D^* = nD$.

Задатак 17. Сто студената, независно и случајно, посећују библиотеку на паузи која траје од 12 до 13 часова. Израчунати вероватноћу да између 46. и 47. доласка прође бар 3 минута.

Задатак 18. Нека је $\mathbf{X}_2$ узорак из униформне $\mathcal{U}[0,b]$ расподеле. Израчунати $E(X_{(2)}|X_{(1)})$.

Задатак 19. Нека је $\mathbf{X}_2$ узорак из нормалне $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$ расподеле. Израчунати $EX_{(1)}$, као и коваријацију $cov(X_{(1)}, X_{(2)})$.

Задатак 20. Нека је $\mathbf{X}_n$ узорак из униформне $\mathcal{U}[0,1]$ расподеле. Израчунати расподелу узорачког распона $R_n = X_{(n)} - X_{(1)}$, као и $E(X_{(n)}|R_n)$.

Задатак 21. Нека је $\mathbf{X}_n$ узорак из униформне $\mathcal{U}[0,1]$ расподеле. Израчунати расподелу узорачког центра $C_n = \frac{1}{2}(X_{(n)} + X_{(1)})$.

Задатак 22. Нека је $\mathbf{X}_n$ узорак из униформне $\mathcal{U}[a,b]$ расподеле. Упоредити узорачку средину, узорачку медијану и узорачки центар као оцене средине расподеле $\frac{a+b}{2}$.

Задатак 23. Нека је $\mathbf{X}_n$ узорак из експоненцијалне $\mathcal{E}(\lambda)$ расподеле. Показати да су случајне величине $Y_1 = X_{(1)}$ и $Y_i = X_{(i)} - X_{(i-1)},\ i = 2, ..., n$, међусобно независне и да имају експоненцијалну $\mathcal{E}((n-i+1)\lambda)$ расподелу.

Задатак 24. Случајна величина X има густину $f(x)$ и функцију расподеле $F(x)$. Одредити расподелу случајне величине $Z = F(X)$.

Задатак 25. Обележје X има густину расподеле $f(x)$ и функцију расподеле $F(x)$. Наћи густину статистике $Z_{(j)} = F(X_{(j)})$, као и густину вектора $(Z_{(j)}, Z_{(k)}),\ 1 \leq j < k \leq n$.

Задатак 26. Дат је узорак обима 4 из расподеле са густином $f(x)$. Израчунати $P\left\{X_{(1)} < \mu < X_{(4)}\right\}$.

Задатак 27. Нека је $\mathbf{X}_n$ узорак из расподеле са функцијом расподеле $F(x)$ и густином $f(x)$. Наћи асимптотску густину расподеле статистике $Y_{(n)} = n(1 - F(X_{(n)}))$.

Задатак 28. Нека је $\mathbf{X}_n$ узорак из расподеле са функцијом расподеле $F(x)$ и густином $f(x)$. Наћи асимптотску густину расподеле статистике $W_{(j)} = 2nF(X_{(j)})$.

Другоразредне, довољне и комплетне статистике

Задатак 29. Нека је $\mathbf{X}_n$ узорак из расподеле која припада фамилији положаја, односно за $k \in \{1, ..., n\}$ важи $X_k = \theta + W_k$, где расподела W_k не зависи од параметра положаја θ. Показати да су статистике узорачка дисперзија, узорачки распон и $T = X_1 - 2X_2 + X_4$ другоразредне у односу на параметар положаја θ.

Задатак 30. Нека је $\mathbf{X}_n$ узорак из расподеле која припада фамилији размере, односно важи $X_k = \theta W_k$, где расподела W_k не зависи од параметра размере θ. Показати да су статистике $T_1 = \frac{X_1}{X_1 + X_2}$ и $T_2 = \frac{X_{(n)}}{X_{(1)}}$ другоразредне у односу на параметар размере θ.

Задатак 31. Нека је $\mathbf{X}_n$ узорак из расподеле која припада фамилији положаја и размере, односно за $k \in \{1, ..., n\}$ важи $X_k = \theta_1 + \theta_2 W_k$, где расподела W_k не зависи ни од параметра положаја θ_1 ни од параметра размере θ_2. Показати да су статистике $T_1 = \frac{X_{(n)} - X_{(1)}}{\tilde{S}_n}$ и $T_2 = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_{i+1} - X_i)^2}{\tilde{S}_n^2}$ другоразредне у односу на параметре θ_1 и θ_2.

Задатак 32. Нека су $X_{(1)} \leq \cdots \leq X_{(n)}$ статистике поретка узорка из експоненцијалне $\mathcal{E}(\frac{1}{\theta}),\ 0 < \theta < \infty$, расподеле. Показати да је статистика $Z = \frac{nX_{(1)}}{\sum_{i=1}^{n} X_{(i)}}$ другоразредна у односу на параметар θ.

Задатак 33. Нека $\mathbf{X}_n = (X_1, ..., X_n)$ има фамилију геометријских $\mathcal{G}(p)$ расподела. Одредити довољну статистику $U(\mathbf{X}_n)$ за непознати параметар p.

Задатак 34. Нека је (X_1, X_2) узорак из Пуасонове $\mathcal{P}(\lambda)$ расподеле. Да ли су статистике $U = X_1 + X_2$ и $V = X_1 + 2X_2$ довољне статистике параметра λ?

Задатак 35. Нека $\mathbf{X}_n$ има фамилију униформних $\mathcal{U}[0, \theta]$ расподела. Одредити довољну статистику $U(\mathbf{X}_n)$ за непознати параметар θ.

Задатак 36. Наћи довољне статистике за непознате параметре на основу узорка обима n из следећих фамилија расподела:

а) померене експоненцијалне $\mathcal{E}(1, \theta)$ са густином $f(x; \theta) = e^{-(x-\theta)},\ x > \theta$;

б) бета $\beta(\theta, 1),\ \theta > 0$;

в) Бернулијеве $\mathcal{B}er(p), p \in (0,1)$;

г) Вејбулове $\mathcal{W}(\alpha, \sigma)$ са густином $f(x;\alpha,\sigma) = \sigma\alpha x^{\alpha-1}e^{-\sigma x^{\alpha}},\ x \geq 0, \alpha > 0, \sigma > 0$ (у сва три случаја, тј. кад су непозната оба и кад је непознат само један од параметара).

Задатак 37. Нека $(\mathbf{X}_n, \mathbf{Y}_n)$ има фамилију дводимензионих нормалних $\mathcal{N}_2(m_1, m_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$ расподела, са густином расподеле

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{(x-m_1)^2}{\sigma_1^2}+\frac{(y-m_2)^2}{\sigma_2^2}-\frac{2\rho(x-m_1)(y-m_2)}{\sigma_1\sigma_2}\right)},\ (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Одредити довољну статистику $U(\mathbf{X}_n, \mathbf{Y}_n)$ за непознати параметар $\theta = (m_1, m_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$, као и за параметар ρ када су остали познати.

Задатак 38. Нека $(\overrightarrow{\mathbf{X}}_n)$ има фамилију k-димензионих нормалних $\mathcal{N}(\overrightarrow{m}, \Sigma)$ расподела, са густином расподеле

$$f(\overrightarrow{x}; \overrightarrow{m}, \Sigma) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{k}{2}}(\det\Sigma)^{\frac{1}{2}}}e^{-\frac{1}{2}(\overrightarrow{x}-\overrightarrow{m})^T\Sigma^{-1}(\overrightarrow{x}-\overrightarrow{m})},$$

Одредити довољну статистику U за непознати параметар $\theta = (\overrightarrow{m}, \Sigma)$.

Задатак 39. Нека $\mathbf{X}_n$ има фамилију Кошијевих расподела са густином $f(x;\theta) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+(x-\theta)^2},\ x \in \mathbb{R},\ \theta \in \mathbb{R}$. Одредити довољну статистику $U(\mathbf{X}_n)$ за непознати параметар θ.

Задатак 40. Нека $\mathbf{X}_n$ има фамилију померених експоненцијалних $\mathcal{E}(\frac{1}{\theta_1}, \theta_2)$ расподела са густином $f(x;\theta_1,\theta_2) = \frac{1}{\theta_1}e^{-\frac{x-\theta_2}{\theta_1}},\ x \geq \theta_2,\ \theta_1 > 0$. Да ли ова фамилија припада експоненцијалној фамилији расподела? Одредити довољну статистику за $\theta = (\theta_1, \theta_2)$.

Задатак 41. Посматра се обележје X из експоненцијалне $\mathcal{E}(\theta)$ расподеле. Током рада проучаван је узорак $x_1, ..., x_{216}$ и једном приликом направљен је извештај који је садржао следеће вредности:

- обим узорка: 216
- минимум: 0.01
- максимум: 8.27
- просек: 1.09

Због квара на хард диску, изгубљен је почетни узорак и сачуван је само извештај. Након неког времена добијени су нови подаци $(z_1, ..., z_5) = (0.08, 8.48, 2.00, 0.19, 0.61)$ и треба да се направи исти извештај за целокупан узорак $x1, ..., x_{216}, z_1, ..., z_5$. Како изгледа нов извештај? Да ли се губитком почетног узорка изгубила информација о параметру θ? Одговор образложити.

Задатак 42. Показати следећа тврђења:

а) Ако $\mathbf{X}_n$ има фамилију нормалних $\mathcal{N}(\mu, \mu)$ расподела, онда је статистика $\sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2$ минимална довољна за параметар μ.

б) Ако $\mathbf{X}_n$ има фамилију нормалних $\mathcal{N}(\mu,\mu)$ расподела, онда је статистика $\left(\sum\limits_{i=1}^{n} X_i, \sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2\right)$ довољна, али није минимална довољна за параметар μ.

в) Ако $\mathbf{X}_n$ има фамилију нормалних $\mathcal{N}(\mu,\mu^2)$ расподела, онда је статистика $\left(\sum\limits_{i=1}^{n} X_i, \sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2\right)$ довољна, али није минимална довољна за параметар μ.

Задатак 43. Нека $\mathbf{X}_n$ има фамилију Паретових расподела са густином $f(x;\lambda) = \frac{\lambda\alpha^\lambda}{x^{\lambda+1}},\ x > \alpha$, при чему је $\alpha > 0$ познато. Одредити минималну довољну статистику за непознати параметар $\lambda > 0$.

Задатак 44. Нека $\mathbf{X}_n,\ n = 1$, има фамилију мултиномних расподела са параметрима m и $\boldsymbol{p} = \left(\frac{1}{2}+\frac{\theta}{4}, \frac{1}{4}(1-\theta), \frac{1}{4}(1-\theta), \frac{\theta}{4}\right)$.

а) Испитати да ли расподела припада експоненцијалној фамилији расподела.

б) Одредити довољну статистику за параметар θ.

в) Одредити минималну довољну статистику за параметар θ.

Задатак 45. Показати да, ако полином $at^2 + bt + c = 0$ има више од две нуле, тада важи $a = b = c = 0$. Затим показати да је фамилија биномних $\mathcal{B}(2,p),\ p \in (0,1)$, расподела комплетна.

Задатак 46. Испитати комплетност фамилије Пуасонових $\mathcal{P}(\lambda)$ расподела.

Задатак 47. Показати да фамилије нормалних $\mathcal{N}(0,\theta)$ и униформних $\mathcal{U}[-\theta,\theta]$ расподела нису комплетне.

Задатак 48. Показати да фамилије расподела чије су густине $f(x;\theta)$ симетричне око неке константе m која не зависи од θ нису комплетне.

Задатак 49. Показати да фамилија униформних $\mathcal{U}[0,\theta],\ \theta > 1$, расподела није комплетна.

Задатак 50. Показати да је довољна статистика за параметар σ^2 код фамилије нормалних $\mathcal{N}(0,\sigma^2),\ \sigma^2 > 0$, расподела комплетна, иако сама расподела није комплетна.

Задатак 51. Показати да је $(\overline{X}_n, \overline{S}_n^2)$ комплетна довољна статистика за параметар $\theta = (m,\sigma^2)$ код фамилије нормалних $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$ расподела.

Задатак 52. Нека $\mathbf{X}_n$ има фамилију густина расподела $f(x;\theta) = q(\theta)h(x),\ 0 < x < \theta,\ \theta > 0$. Одредити довољну статистику за непознати параметар θ и показати да је њена расподела комплетна.

Задатак 53. Нека $\mathbf{X}_n$ има фамилију $\gamma(\alpha,\beta),\ \alpha,\beta > 0$, расподела. Наћи комплетну довољну статистику за непознати параметар $\theta = (\alpha,\beta)$.

Задатак 54. Нека $\mathbf{X}_n$ има фамилију униформних $\mathcal{U}[\theta-1,\theta+1],\ \theta\in\mathbb{R}$, расподела. Одредити довољну статистику параметра θ и показати да није комплетна.

Задатак 55. Нека $\mathbf{X}_n$ има фамилију експоненцијалних $\mathcal{E}(\lambda)$ расподела. Показати да су статистике $U=\sum\limits_{k=1}^{n}X_k$ и $V=\frac{X_1}{\sum\limits_{k=1}^{n}X_k}$ независне.

Задатак 56. Нека $\mathbf{X}_n$ има фамилију нормалних $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$ расподела. Показати да су статистике $\overline{X}_n$ и $\overline{S}_n^2$ независне.

Задатак 57. Нека $\mathbf{X}_n$ има фамилију нормалних $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$ расподела. Показати да су статистике $U=\sum\limits_{k=1}^{n}X_k$ и $V=\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_kX_k$ независне ако и само ако важи $\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k=0$.

Задатак 58. Нека $\mathbf{X}_n$ има фамилију нормалних $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$ расподела. Показати да су статистике $\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}X_{(k)}$ и $X_{(n)}-\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}X_{(k)}$ независне.

Задатак 59. Нека $\mathbf{X}_n$ има фамилију униформних $\mathcal{U}[0,\theta]$ расподела. Показати да су статистике $\frac{X_{(1)}}{X_{(n)}}$ и $X_{(n)}$ независне и израчунати $E\left(\frac{X_{(1)}}{X_{(n)}}\right)$.

Задатак 60. Нека $\mathbf{X}_n$ има фамилију померених експоненцијалних $\mathcal{E}(1,\theta)$ расподела са густином $f(x;\theta)=e^{-(x-\theta)},\ x\geq\theta$. Показати да су статистике $\sum\limits_{k=1}^{n}(X_{(k)}-X_{(1)})$ и $X_{(1)}$ независне.

Задатак 61. Нека је $(X_1,...,X_5)$ узорак обима 5 из нормалне $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$ расподеле.

а) Показати да су статистике $U=X_1^2+...+X_5^2$ и $V=\frac{X_1^2+X_2^2}{U}$ независне.

б) Да ли статистика $\frac{5}{2}V$ има Фишерову $\mathcal{F}_{2,5}$ расподелу? Објаснити.

в) Израчунати EV.

Тачкасте оцене параметра

Задатак 62. Нека $\mathbf{X}_n$ има фамилију нормалних $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$ расподела. Испитати непристрасност оцене $S_*^2=\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}(X_k-m)^2$ за σ^2.

Задатак 63. Нека $\mathbf{X}_n$ има фамилију померених експоненцијалних $\mathcal{E}(1,\theta)$ расподела. Испитати непристрасност оцене $X_{(1)}$ за параметар θ.

Задатак 64. Нека $\mathbf{X}_n,\ n=1$, има фамилију $\boldsymbol{p}(x;\theta)=\frac{1}{1-e^{-\theta}}\frac{e^{-\theta}\theta^x}{x!},\ x\in\{1,2,...\},\ \theta>0$. Наћи непристрасну оцену за $T(\theta)=1-e^{-\theta}$.

Задатак 65. Нека $\mathbf{X}_n$ има фамилију Бернулијевих $Ber(p)$ расподела. Показати да не постоји непристрасна оцена за параметар $\frac{1}{p}$.

Задатак 66. Нека $\mathbf{X}_n$ има фамилију нормалних $\mathcal{N}(m, m)$ расподела. За оцену непознатог параметра m предложене су две статистике: узорачка средина $\overline{X}_n$ и поправљена узорачка дисперзија $\widetilde{S}_n^2$. Испитати непристрасност и постојаност тих оцена. Испитати која је оцена боља у средње квадратном смислу.

Задатак 67. Нека $\mathbf{X}_n$ има фамилију нормалних $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ расподела. Упоредити средњеквадратне грешке оцена $\overline{S}_n^2$ и $\widetilde{S}_n^2$ за σ^2. За које реално c оцена $c\sum\limits_{k=1}^{n}(X_k - \overline{X}_n)^2$ има најмању средњеквадратну грешку?

Задатак 68. Нека је (X_1, X_2) узорак из експоненцијалне $\mathcal{E}(\frac{1}{\theta})$ расподеле. Показати да је оцена $\widehat{\theta} = \frac{4}{\pi}\sqrt{X_1X_2}$ непристрасна оцена за θ. Да ли је она ефикаснија $\overline{X}_2$?

Задатак 69. Нека $\mathbf{X}_n$ има фамилију гама $\gamma(2, \frac{1}{\theta})$ расподела. Испитати непристрасност оцена $\frac{1}{3n}\sum\limits_{k=1}^{n} X_k^2$ и $\frac{1}{2}\overline{X}_n^2$ за непознату дисперзију DX.

Задатак 70. Нека $\mathbf{X}_n$ има фамилију нормалних $\mathcal{N}(m, 1),\ m \in (0, 1)$, расподела. Испитати непристрасност оцене $T_n = \overline{X}_n I\{0 \le \overline{X}_n \le 1\} + I\{\overline{X}_n > 1\}$ и показати да је боља у средње квадратном смислу од оцене $\overline{X}_n$.

Задатак 71. Нека $\mathbf{X}_n$ има фамилију униформних $\mathcal{U}[-\theta, 2\theta]$, $\theta > 0$, расподела. За оцену непознатог параметра θ предлажу се оцене $T_1 = k\max\left\{-X_{(1)}, \frac{X_{(n)}}{2}\right\},\ k > 0$ и $T_2 = 2\overline{X}_n$. Одредити k тако да T_1 буде непристрасна оцена, а затим испитати која од предложених оцена је боља у средње квадратном смислу.

Задатак 72. Нека $\mathbf{X}_n$ има фамилију нормалних $\mathcal{N}(m_0, \sigma^2)$ расподела, где је m_0 позната константа. Доказати да је оцена $T = \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{2^{\frac{j}{2}}\Gamma(\frac{n+j}{2})}S^j$ непристрасна оцена за σ^j, где је $S^2 = \sum\limits_{k=1}^{n}(X_k - m_0)^2$.

Задатак 73. Нека $\mathbf{X}_n$ има фамилију Бернулијевих $Ber(p)$ расподела. Наћи јединствену најбољу оцену за параметар p.

Задатак 74. Нека $\mathbf{X}_n$ има фамилију Бернулијевих $Ber(p)$ расподела. Наћи јединствену најбољу оцену за параметар $\theta = D\overline{X}_n$.

Задатак 75. Нека $\mathbf{X}_n$ има фамилију униформних $\mathcal{U}[0, \theta]$ расподела. Наћи јединствену најбољу оцену за параметар θ.

Задатак 76. Нека је $\mathbf{X}_n$ узорак из фамилије расподела са законом

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ \frac{\theta(1-\theta)}{4} & \frac{\theta(1-\theta)}{4} & 1 - \frac{\theta(1-\theta)}{2} \end{pmatrix},$$

где је $\theta \in (0, 1)$.

а) Одредити комплетну довољну статистику за параметар θ. Да ли је она минимална довољна статистика?

б) Одредити јединствену најбољу оцену за параметар $\theta(1-\theta)$.

Задатак 77. На основу узорка обима n, наћи јединствену најбољу оцену за параметре следећих расподела

а) гама $\gamma(\alpha, \beta)$,

б) нормалне $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$,

в) бета $\beta(1, \theta)$.

Задатак 78. Нека $\mathbf{X}_n$ има фамилију дискретних униформних расподела на скупу $\{1, 2, ..., \theta\}$. Наћи јединствену најбољу оцену за параметар θ.

Задатак 79. Нека $\mathbf{X}_n,\ n > 2$, има фамилију биномних $\mathcal{B}(m, p)$ расподела.

а) Наћи комплетну довољну статистику за параметар p.

б) Показати да је $\frac{1}{2m}(X_1 + X_2)$ непристрасна оцена за непознати параметар p.

в) Наћи јединствену најбољу оцену за p користећи теорему Леман-Шефеа.

Задатак 80. Нека $\mathbf{X}_n$ има фамилију геомтријских $\mathcal{G}(p)$ расподела. Наћи јединствену најбољу оцену за параметар p.

Задатак 81. Нека $\mathbf{X}_n$ има фамилију Пуасонових $\mathcal{P}(\lambda)$ расподела. Показати да је $T = I\{X_1 < 1\}$ непристрасна оцена за $\theta = P\{X_1 < 1\}$ и наћи јединствену најбољу оцену за параметар θ.

Задатак 82. Нека $\mathbf{X}_n$ има фамилију биномних $\mathcal{B}(m, p)$ расподела. Наћи јединствену најбољу оцену вероватноће тачно једног успеха, односно параметра $\tau(p) = P\{X = 1\}$.

Задатак 83. Нека је $\mathbf{X}_n$ узорак из фамилије транслираних експоненцијалних расподела с густином $f(x; \mu) = e^{\mu - x}$, $x \geq \mu$, $\mu < 0$.

а) Доказати да је $X_{(1)}$ довољна статистика за параметар μ, али да није комплетна, тј. да постоји статистика $U(X_{(1)})$, различита од нуле, која је непристрасна оцена нуле.

б) Нека је $T(X_{(1)}) = (aX_{(1)} + b)I\{X_{(1)} < 0\}$ где су a и b произвољни реални бројеви. Показати да је статистика $T(X_{(1)})$ некорелисана с било којом непристрасном оценом нуле $U(X_{(1)})$.

в) Одредити јединствену најбољу оцену параметра μ.

Задатак 84. Нека $\mathbf{X}_n$ има фамилију експоненцијалних $\mathcal{E}(1, \theta)$ расподела. Наћи јединствену најбољу оцену за параметар θ^2.

Задатак 85. Показати да фамилија униформних $\mathcal{U}[0, \theta]$ расподела није регуларна.

Задатак 86. Нека $\mathbf{X}_n$ има фамилију Пуасонових $\mathcal{P}(\lambda)$ расподела. Израчунати информациону функцију Фишера и доњу границу дисперзије непристрасних оцена Рао-Крамера.

Задатак 87. Нека $\mathbf{X}_n$ има фамилију експоненцијалних $\mathcal{E}(\lambda)$ расподела. Наћи јединствену најбољу оцену за параметар λ и израчунати њену ефикасност.

Задатак 88. Нека $\mathbf{X}_n$ има фамилију гама $\gamma(2, \frac{1}{\theta})$ расподела. Испитати ефикасност оцене $\frac{1}{2}\overline{X}_n$ за параметар θ.

Задатак 89. Нека $\mathbf{X}_n$ има фамилију бета $\beta(\theta, 1)$ расподела. Испитати ефикасност оцене $V_n = \frac{n-1}{-\sum\limits_{k=1}^{n} \ln X_k}$ за параметар θ.

Задатак 90. Нека је (X_1, X_2, X_3) узорак из нормалне $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ расподеле. Израчунати релативну ефикасност оцене $T = \frac{1}{4}(X_1 + 2X_2 + X_3)$ у односу на $\overline{X}_n$.

Задатак 91. Нека $\mathbf{X}_n$ има фамилију униформних $\mathcal{U}[0, \theta]$ расподела. Испитати релативну ефикасност оцене $2\overline{X}_n$ у односу на $\frac{n+1}{n}X_{(n)}$. Шта можемо рећи о ефикасности ових оцена?

Задатак 92. Нека $\mathbf{X}_n$ има фамилију нормалних $\mathcal{N}(\theta, 1)$ расподела. Показати да је јединствена најбоља оцена параметра θ^2 дата статистиком $\overline{X}_n^2 - \frac{1}{n}$. Да ли дисперзија ове оцене достиже доњу границу Рао-Крамера?

Задатак 93. Нека $\mathbf{X}_n$, $n > 2$, има фамилију расподела одређених функцијом F_θ, $\theta \in \Theta$, тако да је $EX_1^2 < \infty$. Размотримо $\overline{X}_n$ и $T = \frac{X_{(1)} + X_{(n)}}{2}$ као оцене параметра θ при квадратној функцији губитака.

а) Показати да је $\overline{X}_n$ боља од T ако је $\mathcal{F}$ фамилија нормалних $\mathcal{N}(\theta, \sigma^2)$, $\theta \in \mathbb{R}, \sigma > 0$, расподела.

б) Показати да је T боља од $\overline{X}_n$ ако је $\mathcal{F}$ фамилија униформних $\mathcal{U}(\theta - \frac{1}{2}, \theta + \frac{1}{2})$, $\theta \in \mathbb{R}$, расподела.

в) Наћи фамилију расподела код које ниједна оцена није боља од друге.

Задатак 94. Нека је X узорак обима 1 из фамилије униформних $\mathcal{U}(0, \theta)$ расподела, где је $\theta > 0$ непознати параметар. Разматрамо оцењивање параметра θ при квадратној функцији губитака. Показати да су за $a \neq \frac{3}{2}$ све оцене из класе $\hat{\theta}(a) = aX$, $a \geq 0$ недопустиве.

Задатак 95. Нека је $\mathbf{X}_n$ узорак из расподеле F_μ тако да је $EX_1^2 < \infty$. Разматрамо оцењивање параметра μ при квадратној функцији губитака. Показати да

а) свака оцена облика $a\overline{X}_n + b$ је недопустива, где су $a > 1$ и b константе,

б) свака оцена облика $\overline{X}_n + b$ је недопустива, где је $b \neq 0$ константе,

Метод момената. Метод максималне веродостојности

Задатак 96. На основу узорка обима n, наћи оцене методом момената за параметре следећих расподела:

а) биномне $\mathcal{B}(10, p)$;

б) униформне $\mathcal{U}[-\theta, \theta]$;

в) гама $\gamma(\theta+1, \theta+2)$.

Задатак 97. Нека $\mathbf{X}_n$ има фамилију експоненцијалних $\mathcal{E}(\lambda, \theta)$ расподела. Наћи оцене методом момената за параметре λ и θ.

Задатак 98. Нека $\mathbf{X}_n$ има фамилију расподела са законом $p(x;\theta) = \frac{1}{1-e^{-\theta}}\frac{e^{-\theta}\theta^x}{x!}, x \in \{1, 2, ...\}, \theta > 0$. Наћи оцену методом момената за θ.

Задатак 99. Нека $(\mathbf{X}_n, \boldsymbol{Y}_n)$ има фамилију густина $f(x,y) = c(\alpha,\beta)y^\beta(1-x)^\alpha$, $0 \leq y \leq x \leq 1$. Наћи оцене методом момената за α и β.

Задатак 100. Нека $\mathbf{X}_n$ има фамилију расподела са законом расподеле $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \frac{2p}{1+p} & \frac{1-p}{1+p} \end{pmatrix}$, где је $p \in (0,1)$ непознати параметар.

а) Одредити оцену $\hat{p}$ методом момената.

б) Одредити оцену $\tilde{p}$ уопштеним методом момената тако да је она функција довољне статистике.

Задатак 101. На основу узорка обима n, наћи оцене максималне веродостојности за параметре следећих расподела:

а) негативне биномне $\mathcal{NB}(10, p)$, $p \in [0,1]$

б) дискретне униформне на скупу $\{1, \ldots, \theta\}, \theta \in \mathbb{N}$,

в) бета $\beta(1, \theta)$, $\theta \geq 1$,

г) Бернулијеве $\mathcal{B}er(p)$, $p \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$,

д) расподеле са густином $f(x;\theta) = \frac{1}{2}(1-\theta^2)e^{\theta x - |x|}$, $x \in \mathbb{R}$, $\theta \in [-1, 1]$.

Задатак 102. Нека $\mathbf{X}_n$ има фамилију померених експоненцијалних $\mathcal{E}(\lambda, \theta)$ расподела.

а) Наћи оцене за параметре λ и θ методом максималне веродостојности.

б) Наћи оцену за други моменат расподеле EX^2 методом максималне веродостојности.

в) Наћи оцену 0.7 квантила расподеле методом максималне веродостојности.

Задатак 103. Нека $\mathbf{X}_n$ има фамилију густина расподеле $f(x, \alpha, \beta) = \frac{1}{2\beta}e^{-\frac{|x-\alpha|}{\beta}}$, $x \in \mathbb{R}$. Наћи оцене максималне веродостојности за параметре α и β.

Задатак 104. Нека $\mathbf{X}_n$ има фамилију униформних $\mathcal{U}[\theta - \frac{1}{2}, \theta + \frac{1}{2}]$ расподела. Наћи оцену максималне веродостојности за параметар θ.

Задатак 105. Нека $\mathbf{X}_n$ има фамилију униформних $\mathcal{U}[\theta, \theta+|\theta|]$ расподела. Наћи оцену максималне веродостојности за θ ако је:

а) $\theta \in (0, \infty)$,

б) $\theta \in (-\infty, 0)$,

в) $\theta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Задатак 106. Узет је узорак обима n из нормалне $\mathcal{N}(\mu, 1)$ расподеле са непознатим параметром μ. Уместо посматрања свих елемената узорка, бележи се само њихов знак. Наћи оцену максималне веродостојности за μ.

Задатак 107. Нека $\mathbf{X}_n$ има фамилију расподела $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{\theta}{3} & \frac{\theta}{3} & 1-\frac{2\theta}{3} \end{pmatrix}$.

а) Наћи оцену методом момената за параметар θ.

б) Наћи оцену методом максималне веродостојности за параметар θ.

в) Испитати релативну ефикасност ове две оцене. Да ли је нека од њих ефикасна?

Задатак 108. Нека $\mathbf{X}_n$ има фамилију нормалних $\mathcal{N}(\theta, \sigma^2)$ расподела. Одредити оцене максималне веродостојности параметара.

Задатак 109. Нека $\mathbf{X}_n$ има фамилију густина расподела:

$$f(x;\theta_1,\theta_2) = \begin{cases} \dfrac{1}{\theta_1+\theta_2} e^{-\frac{x}{\theta_1}}, & x > 0 \\ \dfrac{1}{\theta_1+\theta_2} e^{\frac{x}{\theta_2}}, & x \leq 0 \end{cases},$$

где су $\theta_1 > 0,\ \theta_2 > 0$ непознати параметри. Одредити оцену максималне веродостојности за $\theta = (\theta_1, \theta_2)$.

Задатак 110. Нека $\mathbf{X}_n$ има фамилију густина расподела $f(x; m, \sigma^2) = \frac{g'(x)}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(g(x)-m)^2}{2\sigma^2}}$, где је $g(x)$ диференцијабилна функција, а x припада области дефинисаности функције $g(x)$. Наћи оцене максималне веродостојности за параметре m и σ^2.

Задатак 111. Нека $\mathbf{X}_n$ има фамилију расподела $p(x;\theta) = \frac{a(x)\theta^x}{c(\theta)},\ x \in \{j, j+1, ...\}$. Наћи оцену максималне веродостојности за параметар $\tau(\theta) = EX$.

Задатак 112. Нека $\mathbf{X}_n$ има фамилију густина

$$f(x;\theta) = \frac{\theta}{1-\theta} x^{\frac{2\theta-1}{1-\theta}},\ x \in (0,1),\ \theta \in \left(\frac{1}{2}, 1\right).$$

Наћи оцену за θ методом максималне веродостојности.

Задатак 113. Нека $\mathbf{X}_n$ има фамилију биномних $\mathcal{B}(k, p)$ расподела, где је $p \in (0,1)$ позната константа, а k непознато. Одредити оцену максималне веродостојности параметра k.

Задатак 114. Нека $\mathbf{X}_n$ има фамилију логистичких расподела с густином

$$f(x;\theta) = \frac{e^{-\frac{x}{\theta}}}{\theta(1+e^{-\frac{x}{\theta}})^2},\ x \in \mathbb{R},\ \theta > 0.$$

а) Показати да је $EX_1 = 0$.

б) Ако је $DX_1 = \frac{\theta^2\pi^2}{3}$, одредити оцену T_n параметра θ методом момената.

в) Доказати да је T_n постојана оцена.

Задатак 115. Нека $\mathbf{X}_n$ има фамилију гама $\gamma(\alpha, \beta)$ расподела. Наћи оцену максималне веродостојности релативне дисперзије $\delta = \frac{DX}{EX}$.

Задатак 116. Нека $\mathbf{X}_n$ има фамилију логистичких расподела са густином

$$f(x;\theta) = \frac{e^{-(x-\theta)}}{(1+e^{-(x-\theta)})^2},\ x \in \mathbf{R},\ \theta \in \mathbf{R}.$$

Одредити оцену максималне веродостојности параметра θ.

Задатак 117. Нека $\mathbf{X}_n$ има фамилију Кошијевих расподела са густином:

$$f(x;\theta) = \frac{1}{\pi(1+(x-\theta)^2)}.$$

Одредити (нумеричким методама) оцену максималне веродостојности за θ.

Задатак 118. Нека $\mathbf{X}_n$ има фамилију Вејбулових расподела са густином

$$f(x;\theta) = \theta x^{\theta-1} e^{-x\theta},\ x > 0.$$

Одредити оцену максималне веродостојности параметра θ.

Задатак 119. Нека $\mathbf{X}_n$ има фамилију расподела са законом расподеле који представља месавину две Пуасонове расподеле

$$p(x;\lambda,\mu,\theta) = \theta\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} + (1-\theta)\frac{e^{-\mu}\mu^x}{x!}, x \in \mathbf{N}_0.$$

Одредити оцене максималне веродостојности параметара.

Задатак 120. Нека $\mathbf{X}_n$ има фамилију p-димензионих расподела чије су компоненте међусобно независне случајне величине с нормалним $\mathcal{N}(m_i, \sigma^2),\ i = 1, ..., p$, расподелама. Наћи оцене максималне веродостојности за параметре $m_1, m_2, ..., m_p$ и σ^2 и испитати постојаност оцене за σ^2 када $n \to \infty$ и када $p \to \infty$.

Задатак 121. Нека $\mathbf{X}_n$ има фамилију Кошијевих $\mathcal{C}(\theta)$ расподела с густином $f(x;\theta) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+(x-\theta)^2},\ x \in \mathbb{R}$. Упоредити, у смислу ефикасности, оцену $X_{(\frac{n+1}{2})}$ и оцену максималне веродостојности за θ.

Задатак 122. Нека $\mathbf{X}_n$ има фамилију логнормалних расподела, односно $\ln X_n$ има фамилију $N(\theta,\theta),\ \theta > 0$, расподела. Одредити асимптотску расподелу оцене максималне веродостојности параметра θ.

Задатак 123. Показати да су асимптотске расподеле оцена $\hat{p}$ и $\tilde{p}$ из 100. задатка нормалне.

Задатак 124. Нека $\mathbf{X}_n$ има фамилију Бернулијевих $\mathcal{B}er(p)$ расподела са параметром $p \in (0,1)$. Нека је $\hat{\theta}$ оцена максималне веродостојности за $\theta = p(1-p)$.

а) Показати да је $\hat{\theta}$ асимптотски нормална за $p \neq \frac{1}{2}$.

б) Када је $p = \frac{1}{2}$, одредити недегенерисану асимптотску расподелу од $\hat{\theta}$.

Задатак 125. Нека $\mathbf{X}_n$ има фамилију гама $\gamma(4,\theta),\ \theta > 0$, расподела.

а) Наћи Фишерову информациону функцију.

б) Испитати ефикасност оцене максималне веродостојности $\hat{\theta}$ за θ.

в) Која је асимптотска расподела од $\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta)$?

Задатак 126. Нека $\mathbf{X}_n$ има фамилију гама $\gamma(\alpha,\beta)$ расподела. Одредити асимптотску расподелу оцена максималне веродостојности.

Задатак 127. Нека $\mathbf{X}_n$ има фамилију Паретових расподела с густином

$$f(x;\alpha,\theta) = \frac{\alpha\theta^\alpha}{x^{\alpha+1}},\ x \geq \theta,\ \alpha > 0,\ \theta > 0.$$

а) У случају да је θ позната константа, одредити оцену максималне веродостојности параметра α, као и $\widehat{g(\alpha)}$, оцену максималне веродостојности параметра $g(\alpha) = \frac{1}{\alpha} + \ln\theta$.

б) Одредити асимптотску расподелу оцене $\widehat{g(\alpha)}$, тј. наћи граничну расподелу $\sqrt{n}(\widehat{g(\alpha)} - g(\alpha))$, када $n \to \infty$.

в) Одредити оцену максималне веродостојности $(\hat{\alpha}, \hat{\theta})$ у случају да су оба параметра непозната.

г) Одредити асимптотску расподелу оцене $\hat{\theta}$, тј. наћи граничну расподелу $n(\hat{\theta} - \theta)$, када $n \to \infty$.

Задатак 128. Нека $\mathbf{X}_n$ има фамилију геометријских $\mathcal{G}(p),\ p \in (0,1)$ расподела.

а) Наћи $\hat{p}$, оцену параметра p методом максималне веродостојности и испитати да ли је она постојана.

б) Доказати да случајна величина $T_n = \sqrt{n}(\hat{p} - p)$ има асимптотски нормалну $\mathcal{N}(0, p^2(1-p))$ расподелу.

Задатак 129. Нека $\mathbf{X}_n$ има фамилију Паретових расподела с густином $f(x;\theta) = \theta(1 + x)^{-(1+\theta)},\ x \geq 0, \theta > 2$.

а) Израчунати математичко очекивање $m(\theta)$ и дисперзију $\sigma^2(\theta)$ елемента узорка X_1.

б) Нека је $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} X_k$. Испитати конвергенцију у расподели низа $\sqrt{n}(\bar{X}_n - m(\theta))$, коришћењем централне граничне теореме.

в) Наћи $\hat{\theta}_n$, оцену параметра θ методом момената.

г) Наћи асимптотску расподелу $\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta)$ кад $n \to \infty$ користећи резултат под б) и делта метод.

Задатак 130. Одредити асимптотску расподелу оцена добијених у 109. задатку.

Бајесов метод оцењивања.

Задатак 131. Нека $\mathbf{X}_n$ има фамилију Бернулијевих расподела с параметром θ, а априорна расподела за параметар θ је бета $\beta(a,b)$. Наћи апостериорну расподелу за θ.

Задатак 132. Нека $\mathbf{X}_n$ има фамилију густина $f(x;\theta)$ и нека је $\pi(\theta)$ априорна расподела параметра θ. Ако је $U = U(\mathbf{X}_n)$ довољна статистика за θ, показати да је апостериорна расподела за $\theta|\mathbf{X}_n = \mathbf{X}_n$ иста као и за $\theta|U = U(\mathbf{X}_n)$.

Задатак 133. Нека $\mathbf{X}_n$ има фамилију биномних $\mathcal{B}(3,p)$ расподела. Априорни закон расподеле параметра p је $\begin{pmatrix} 0.4 & 0.5 \\ 0.7 & 0.3 \end{pmatrix}$. Наћи апостериорну расподелу параметра p ако је узорак (обима 1) $x = 2$.

Задатак 134. Нека $\mathbf{X}_n$ има фамилију нормалних $\mathcal{N}(\theta,\sigma^2)$ расподела, а априорна расподела за θ је нормална $\mathcal{N}(\mu,\tau^2)$. Наћи апостериорну расподелу за параметар θ ако је $n = 1$.

Задатак 135. Нека $\mathbf{X}_n$ има фамилију нормалних $\mathcal{N}(\theta,10)$ расподела, а априорна расподела за θ је нормална $\mathcal{N}(\mu,\tau^2)$. Оценити хиперпараметре методом максималне веродостојности, а затим одредити апостериорну расподелу на основу узорка $(-18.805, -7.561, 5.856, -1.368, 8.891, 4.406)$.

Задатак 136. Нека $\mathbf{X}_n$ има фамилију нормалних $\mathcal{N}(\theta,\sigma^2)$ расподела, а априорна расподела за θ је нормална $\mathcal{N}(\mu,\tau^2)$. Наћи апостериорну расподелу за параметар θ (у општем случају).

Задатак 137. Нека $\mathbf{X}_n$ има фамилију Пуасонових $\mathcal{P}(\lambda)$ расподела. Нека је априорна расподела за λ експоненцијална $\mathcal{E}(1)$. Наћи апостериорну расподелу за параметар λ.

Задатак 138. Наћи Цефрисове априорне расподеле за параметар θ код фамилије следећих расподела:

а) Бернулијеве с параметром θ;

б) гама $\gamma(10,\frac{1}{\theta})$;

в) униформне $U[0,\theta]$.

Задатак 139. Нека је $\pi(\theta|\mathbf{X}_n)$ апостериорна расподела за θ. Показати да је при функцији губитака:

а) $L(\theta,\widehat{\theta}) = I\{\theta \neq \widehat{\theta}\}$, Бајесова оцена мода апостериорне расподеле.

б) $L(\theta,\widehat{\theta}) = |\theta - \widehat{\theta}|$, Бајесова оцена медијана апостериорне расподеле.

в) $L(\theta,\widehat{\theta}) = (\theta - \widehat{\theta})^2$, Бајесова оцена средња вредност апостериорне расподеле.

Задатак 140. Резултат неке особе на тесту интелигенције има нормалну $\mathcal{N}(\theta,100)$ расподелу, где је θ вредност IQ те особе. Расподела IQ на целој популацији је нормална $\mathcal{N}(100,225)$. На основу резултата теста од 115, оценити вредност параметра θ.

Задатак 141. Из серије са непознатим уделом дефектних производа p извучен је узорак обима n. Нема никаквих претходних информација о том уделу ($p \in U[0,1]$). Наћи Бајесову оцену удела p.

Задатак 142. Нека $\mathbf{X}_n$, $n = 1$ има фамилију померених експоненцијалних $\mathcal{E}(1,\theta)$ расподела. Априорна густина расподеле за θ је $\pi(\theta) = \frac{1}{2}e^{-|\theta|}, \theta \in \mathbb{R}$. Наћи Бајесову оцену параметра θ.

Задатак 143. Нека $\mathbf{X}_n$ има фамилију униформних $U[0,\theta]$, $\theta > 0$, расподела. Нека је априорна расподела за θ неправа расподела $\pi(\theta) \sim \frac{1}{\theta}$. Наћи Бајесову оцену параметра θ.

Задатак 144. Нека $\mathbf{X}_n$, $n = 1$, има фамилију гама $\gamma(\alpha,\beta)$, $\alpha \in \mathbb{N}$, расподела. Априорна расподела за непознати параметар α је геометријска $G(1-\lambda)$. Наћи Бајесову оцену параметра α.

Задатак 145. Нека $\mathbf{X}_n$, $n = 1$, има дискретну униформну расподелу на скупу $\{0,1,...,\theta\}$, $\theta \in \{0,1,...\}$. Априорни закон расподеле параметра θ је $\pi(\theta) = (1-\lambda)^2\lambda^\theta(\theta+1)$, $\theta \in \{0,1,...\}$. Наћи Бајесову оцену параметра θ.

Задатак 146. Нека $\mathbf{X}_n$ има фамилију униформних $U[0,\theta]$ расподела, а априорна расподела за θ је $U[0,1]$. Наћи Бајесову оцену параметра θ ако је функција губитака $L(\theta,\widehat{\theta}) = |\theta - \widehat{\theta}|$.

Задатак 147. Нека $\mathbf{X}_n$ има фамилију униформних $U[0,\theta]$ расподела, а априорна расподела за параметар θ је Паретова $Pa(\alpha,c)$ са густином $\pi(\theta) = \frac{\alpha}{c}\left(\frac{\theta}{c}\right)^{-\alpha-1}$, $\theta > c > 0$, $\alpha > 0$. Показати да је апостериорна расподела такође Паретова.

Задатак 148. Нека $(\mathbf{X}_n, \boldsymbol{Y}_n)$ има фамилију густина расподеле

$$f(x,y|\theta) = \theta^2 y e^{-\theta xy},\ x > 1,\ y > 0,\ \theta > 1.$$

Априорна расподела за θ је $\pi(\theta) = \frac{1}{\theta^2}$, $\theta > 1$.

а) На основу узорка (x,y) (обима 1) наћи Бајесову оцену за θ при квадратној функцији губитака.

б) Испитати апостериорну расподелу у случају да је познато само x, а не и y из узорка.

Задатак 149. Нека $\mathbf{X}_n$ има нормалну $\mathcal{N}(0,\frac{1}{\theta})$ расподелу и нека θ има Џефрисову априорну расподелу. Наћи Бајесову оцену параметра θ при квадратној функцији губитака.

Задатак 150. Показати да је при функцији губитака $L(\theta,\widehat{\theta}) = \psi(\theta)(\theta-\widehat{\theta})^2$, $\psi(\theta) > 0$, Бајесова оцена $\widehat{\theta} = \frac{E(\psi(\theta)\theta|\mathbf{X}_n)}{E(\psi(\theta)|\mathbf{X}_n)}$.

Задатак 151. Приликом процењивања IQ неке особе (задатак 140) понекад се користи и функција губитака $L(\theta,\widehat{\theta}) = e^{\frac{(\theta-100)^2}{900}}(\theta-\widehat{\theta})^2$, јер се показује као боља за вредности IQ које су доста изнад просека. Наћи Бајесову оцену на основу ове функције ако је резултат на тесту 135.

Задатак 152. Нека је $\mathbf{X}$ узорак из фамилије расподела која има закон расподеле $f(x) = p(1-p)^x$, $x = 0,1,\ldots$, и нека је априорна расподела параметра p униформна на интервалу $(0,1)$.

Наћи Бајесову стандардну оцену (као максимум апостериорне расподеле) параметра p на основу реализованог узорка $\mathbf{x}$ (обима n).

Задатак 153. Тестира се пет електронских компоненти како би се одредило θ, просечан животни век компоненте. Познато је да животни век компоненти има експоненцијалну $\mathcal{E}(\frac{1}{\theta})$ расподелу. Од раније је познато да θ има инверзну гама $\mathcal{I}\gamma(\alpha = 10, \beta = 100)$ расподелу са густином $\pi(\theta) = \frac{\beta^\alpha e^{-\frac{\beta}{\theta}}}{\Gamma(\alpha)\theta^{\alpha+1}}, \theta > 0$. Добијен је узорак $\boldsymbol{x} = (15, 12, 14, 10, 12)$. Одредити Бајесове оцене параметра θ за индикатор и квадратну функцију губитака.

Задатак 154. Посматра се велика испорука делова и пет случајно одабраних делова је тестирано на оштећеност. Број оштећених производа има биномну $\mathcal{B}(5, \theta)$ расподелу. Из ранијих пошиљки је познато да θ има бета $\beta(1, 9)$ расподелу. Ако је добијена вредност x ($n = 1$), одредити Бајесову оцену од θ ако је функција губитака

а) $L(\theta, a) = (\theta - a)^2$;

б) $L(\theta, a) = |\theta - a|$;

в) $L(\theta, a) = \frac{(\theta-a)^2}{\theta(1-\theta)}$;

г) $L(\theta, a) = (\theta - a)$ ако је $\theta > a$ и $L(\theta, a) = 2(a - \theta)$ ако је $\theta \leq a$.

Минимаксни метод оцењивања

Задатак 155. Нека $\mathbf{X}_n$, $n = 1$, има фамилију Бернулијевих расподела са параметром θ. Одредити минимаксну оцену параметра θ ако је скуп могућих оцена $\theta \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ и користи се квадратна функција губитака.

Задатак 156. Нека је X обележје које има хипергеометријску расподелу са законом расподеле

$$P\{X = x\} = \frac{\binom{\theta}{x}\binom{N-\theta}{r-x}}{\binom{N}{r}}, x = \max\{0, r - (N - \theta)\}, ..., \min\{r, \theta\},$$

где су N и r познати и θ је непознати цео број између 0 и N. Функција губитака је квадратна.

а) Показати да функција ризика од $T(X) = \alpha\frac{X}{r} + \beta$ је константа, где је $\alpha = \frac{1}{1+\sqrt{\frac{N-r}{r(N-1)}}}$ и $\beta = \frac{1-\alpha}{2}$.

б) Показати да T из (а) је минимаксна оцена од $\frac{\theta}{N}$ и Бајесова оцена са априорном расподелом

$$\pi(\theta) = \frac{\Gamma(2c)}{(\Gamma(c))^2}\int_0^1 \binom{N}{\theta} t^{\theta+c-1}(1-t)^{N-\theta+c-1}dt, \theta = 0, ..., N,$$

где је $c = \frac{\beta}{\frac{\alpha}{r} - \frac{1}{N}}$.

Задатак 157. Нека је $\mathbf{X}_n$, $n = 1$, узорак из геометријске $\mathcal{G}(p)$ расподеле.

а) Показати да је $I\{X = 1\}$ минимаксна оцена од p при функцији губитака $L(p, a) = \frac{(a-p)^2}{p(1-p)}$.

б) Ако је $\beta(\frac{1}{j}, 1), j = 1, 2, ...$ низ априорних расподела за p, доказати тврђење под (а).

Задатак 158. Нека је $\mathbf{X}_n$, $n = 1$, узорак из нормалне $\mathcal{N}(\mu, 1)$ расподеле и нека μ има априорну расподелу $\pi(\mu) \sim e^{\mu}$. При квадратној функцији губитака, показати да је Бајесова оцена за μ $X + 1$ и да она није минимаксна.

Задатак 159. Нека је $\mathbf{X}_n$ узорак из Бернулијеве фамилије расподела с непознатим параметром p.

а) Нека је априорна расподела параметра p, $\pi(p) = p^{a-1}(1-p)^{b-1}\frac{1}{B(a,b)}$, $p \in (0,1)$. Доказати да је оптимална Бајесова оцену у случају да је функција губитака $L(p, \hat{p}) = \frac{(\hat{p}-p)^2}{p(1-p)}$,

$$\hat{p}_B = \frac{a + \sum\limits_{i=1}^{n} x_i - 1}{a + b + n - 2}.$$

Користити да је оптимална Бајесова оцена за функцију губитака $\psi(\theta)(\hat{\theta} - \theta)^2$ једнака $\frac{E(\psi(\theta)\theta|\mathbf{x})}{E(\psi(\theta)|\mathbf{x})}$.

б) Израчунати ризик оптималне Бајесове оцене добијене под а).

в) Одредити минимаксну оцену параметра p у случају функције губитака дате под а).

Задатак 160. Нека је $\mathbf{X}_n$ узорак из фамилије Бернулијевих расподела с непознатим параметром p. Циљ је одредити оптималну оцену при функцији губитака $L(\hat{p}, p) = \frac{(\hat{p}-p)^2}{p(1-p)}$.

а) Претпоставимо да је априорна расподела параметра p униформна на интервалу (0,1). Доказати да је оптимална Бајесова оцена параметра p узорачка средина $\overline{x}$. Да ли ова оцена допустива и зашто?

б) Одредити ризик оцене $\overline{X}_n$ и испитати да ли је ова оцена минимаксна при поменутој функцији губитака.

Тестирање статистичких хипотеза

Задатак 161. Нека $\mathbf{X}_n$, $n = 1$ има фамилију расподела која зависи од параметра $\theta \in \{1, 3\}$ и дата је следећом табелом:

x	0	1	2	3	4	5
$p(x,1)$	0.02	0.03	0.05	0.04	0.36	0.50
$p(x,3)$	0.04	0.05	0.08	0.12	0.41	0.30

Наћи најбољи тест с прагом значајности 0.05 за тестирање хипотезе $H_0(\theta = 1)$ против алтернативе $H_1(\theta = 3)$, а затим моћ теста и функцију моћи теста.

Задатак 162. Наћи најбољу критичну област за тестирање хипотезе да X има дискретну униформну расподелу на скупу $\{1, \ldots, 10\}$ против алтернативе да је расподела

$$p(x) = 0.01,\ x \in \{1, \ldots, 10\} \setminus \{2, 5\},\ p(2) = 0.42,\ p(5) = 0.50,$$

на основу узорка обима 2, за праг значајности 0.03. Наћи и моћ овог теста.

Задатак 163. Нека $\mathbf{X}_n$, $n = 2$ има фамилију експоненцијалних $\mathcal{E}(\frac{1}{\theta})$ расподела. За тестирање $H_0(\theta = 2)$ против алтернативе $H_1(\theta = 4)$ предлаже се критична област $W = \{(x_1, x_2) \mid x_1 + x_2 \geq 9.5\}$. Израчунати вероватноће грешке прве и друге врсте, моћ теста и функцију моћи теста.

Задатак 164. Нека $\mathbf{X}_n,\ n=2$ има фамилију густина расподеле $f(x,\theta)=(2x)^\theta,\ x\in[0,1],\ \theta\in\{0,1\}$. За тестирање $H_0(\theta=0)$ против алтернативе $H_1(\theta=1)$ предлажу се два теста: $W_1=\{x_1\geq c_1, x_2\geq c_1\}$ и $W_2=\{x_1+x_2\geq c_2\}$.

а) Наћи константе c_1 и c_2 тако да прагови значајности оба теста буду $\frac{1}{8}$.

б) Наћи моћ оба теста и испитати који од њих је бољи.

Задатак 165. Нека $\mathbf{X}_n$ има бета $\beta(\theta,1)$ расподелу. Наћи најбољу критичну област за тестирање $H_0(\theta=\theta_0)$ против алтернативе $H_1(\theta=\theta_1),\ \theta_1>\theta_0$. Наћи и функцију моћи теста за $n=2$.

Задатак 166. Нека $\mathbf{X}_n$ има фамилију гама $\gamma(\alpha,\frac{1}{\beta})$ расподела. Наћи најбољи тест за тестирање $H_0(\alpha=\alpha_0,\beta=\beta_0)$ против алтернативе $H_1(\alpha=\alpha_1,\beta=\beta_1)$. Наћи и одговарајуће тестове ако је:

а) $\alpha_1=\alpha_0$,

б) $\beta_1=\beta_0$.

Задатак 167. Нека $\mathbf{X}_n,\ n=10$ има фамилију нормалних $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$ расподела. Тестирамо хипотезу $H_0(\sigma=1)$ против алтернативе $H_1(\sigma=2)$. Наћи најбољу критичну област за праг значајности 0.05.

Задатак 168. Нека $\mathbf{X}_n,\ n=10$ има фамилију Пуасонових $\mathcal{P}(\theta)$ расподела. Наћи најбољи тест за тестирање $H_0(\theta=0.1)$ против алтернативе $H_1(\theta=\theta_1),\ \theta_1>0.1$, за праг значајности 0.05.

Задатак 169. Нека $\mathbf{X}_n$ има фамилију померених експоненцијалних $\mathcal{E}(\lambda,\theta)$ расподела. Наћи најбољи тест за тестирање $H_0(\lambda=\lambda_0,\theta=\theta_0)$ против $H_1(\lambda=\lambda_1,\theta=\theta_1),\ \lambda_1>\lambda_0,\theta_1<\theta_0$. Да ли је тај тест униформно најмоћнији?

Задатак 170. Нека $\mathbf{X}_n$ има фамилију експоненцијалних $\mathcal{E}(\lambda)$ расподела. Наћи најбољу критичну област за тестирање $H_0(\lambda=1)$ против алтернативе $H_1(\lambda=\lambda_1),\ \lambda_1\neq 1$. Да ли је тест униформно најмоћнији? За $\lambda_1=2,\ n=100$ и праг значајности 0.05, наћи моћ овог теста.

Задатак 171. Нека $\mathbf{X}_n,\ n=1$ има фамилију густина расподеле

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\theta(x-\frac{1}{4})+1,\ x\in[0,\frac{1}{2}]\\ -\theta(x-\frac{3}{4})+1,\ x\in[\frac{1}{2},1]\end{cases}.$$

Тестирати хипотезу $H_0(\theta=0)$ против алтернативе $H_1(\theta>0)$ за дати праг значајности α. Испитати да ли је тест униформно најмоћнији.

Задатак 172. Нека $\mathbf{X}_n,\ n=1$ има фамилију густина расподеле $f(x;\theta)=\theta(x-\frac{1}{2})+1,\ x\in[0,1],\ \theta\in[-2,2]$. Тестирати хипотезу $H_0(\theta=0)$ против алтернативе $H_1(\theta\neq 0)$ за дати праг значајности α. Испитати да ли је тест униформно најмоћнији.

Задатак 173. Наћи најбољу критичну област за тестирање хипотезе да $\mathbf{X}_n$ има фамилију Пуасонових $\mathcal{P}(1)$ расподела против алтернативе да има фамилију расподела задатих законом $p(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1},\ x\in\mathbb{N}_0$.

Задатак 174. Наћи најбољу критичну област за тестирање да $\mathbf{X}_n$ има фамилију нормалних $\mathcal{N}(0,1)$ расподела против алтернативе да има фамилију Лапласових расподела са густином $f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}, \ x \in \mathbb{R}$. За $n = 100$ и праг значајности 0.05, одредити и критичну вредност теста.

Задатак 175. На основу 20 бацања новчића, наћи униформно најмоћнији тест за тестирање $H_0(p = \frac{1}{2})$ против алтернативе $H_1(p > \frac{1}{2})$, где је p вероватноћа добијања главе. За праг значајности узети 0.01.

Задатак 176. Нека $\mathbf{X}_n$ има фамилију униформних $\mathcal{U}[0,\theta]$ расподела. Наћи униформно најмоћнији тест за тестирање $H_0(\theta = \theta_0)$ против алтернативе $H_1(\theta < \theta_0)$. За дати праг значајности α наћи функцију моћи теста.

Задатак 177. Нека $\mathbf{X}_n, \ n = 16$ има фамилију нормалних $\mathcal{N}(m,4)$ расподела. С прагом значајности 0.01, наћи униформно најмоћнији тест за тестирање $H_0(m \leq 2)$ против алтернативе $H_1(m > 2)$.

Задатак 178. Нека $\mathbf{X}_n, \ n = 60$ има фамилију Бернулијевих $Ber(p)$ расподела. Наћи униформно најмоћнији тест нивоа 0.05 за $H_0(p \geq 0.7)$ против $H_1(p < 0.7)$.

Задатак 179. Нека $\mathbf{X}_n, \ n = 10$ има фамилију експоненцијалних $\mathcal{E}(\lambda), \ \lambda > 0$ расподела. Наћи униформно најмоћнији тест за тестирање $H_0(\lambda \leq 1)$ против алтернативе $H_1(\lambda > 1)$, за праг значајности 0.05.

Задатак 180. Нека $\mathbf{X}_n$ има фамилију униформних $\mathcal{U}[0,\theta]$ расподела. За тестирање хипотезе $H_0(\theta = 1)$ против алтернативе $H_1(\theta > 1)$ предлаже се тест функција $\varphi_T = I\{|T_n| > k\}$, где је тест статистика $T_n = \sqrt{n}(2\bar{X} - 1)$.

а) У случају $n = 100$ одредити константу k тако да тест φ_T буде мере $\alpha = 0.05$.

б) Одредити функцију моћи теста. Да ли је тест φ_T непристрасан?

в) Да ли је овај тест униформно најмоћнији? Одговор образложити.

Задатак 181. Нека $\mathbf{X}_n$ има бета $\beta(\theta,1)$ расподелу. Одредити униформно најмоћнији тест за тестирање $H_0(\theta \leq \theta_0)$ против алтернативе $H_1(\theta > \theta_0)$.

Задатак 182. Нека $\mathbf{X}_n, \ n = 1$ има фамилију логистичких расподела задатих густином

$$f(x;\theta) = \frac{e^{x-\theta}}{(1 + e^{x-\theta})^2}, \ x \in \mathbb{R}, \ \theta \in \mathbb{R}.$$

а) Испитати да ли логистичка расподела има монотон количник веродостојности.

б) Одредити најмоћнији тест мере α за тестирање хипотезе $H_0(\theta = 0)$ против алтернативе $H_1(\theta = 1)$. Израчунати моћ теста за $\alpha = 0.05$.

в) Да ли је тест из дела б) униформно најмоћнији тест мере α за тестирање хипотезе $H_0(\theta \leq 0)$ против алтернативе $H_1(\theta > 0)$?

Задатак 183. Нека $\mathbf{X}_n,\ n=1$ има фамилију Кошијевих расподела задатих густином

$$f(x;\theta)=\frac{\theta}{\pi}\frac{1}{x^2+\theta^2},\ x\in\mathbb{R},\ \theta>0.$$

Показати да ова расподела нема монотон количник веродостојности, а затим пронаћи довољну статистику за θ чија расподела има монотон количник веродостојности.

Задатак 184. Нека $\mathbf{X}_n$ има фамилију униформних $\mathcal{U}(0,\theta)$ расподела. Одредити униформно најмоћнији тест за тестирање $H_0(\theta\leq\theta_0)$ против $H_1(\theta>\theta_0)$ са нивоом значајности α.

Задатак 185. Нека $\mathbf{X}_n$ има фамилију нормалних $\mathcal{N}(m,1)$ расподела. С прагом значајности α тестирати хипотезу $H_0(m=m_0)$ против алтернативе $H_1(m\neq m_0)$ тестом количника веродостојности.

Задатак 186. Нека $\mathbf{X}_n$ има фамилију померених експоненцијалних $\mathcal{E}(\frac{1}{\lambda},\theta)$ расподела. Наћи критичну област за тестирање хипотезе $H_0(\theta=\theta_0)$ против алтернативе $H_1(\theta\neq\theta_0)$ тестом количника веродостојности ако је λ:

а) позната константа,

б) сметајући параметар.

Задатак 187. Нека $\mathbf{X}_n$ има фамилију померених експоненцијалних $\mathcal{E}(\frac{1}{\lambda},\theta)$ расподела. Наћи критичну област за тестирање хипотезе $H_0(\lambda=\lambda_0)$ против алтернативе $H_1(\lambda\neq\lambda_0)$ тестом количника веродостојности ако је θ сметајући параметар.

Задатак 188. Нека $\mathbf{X}_n$ има фамилију бета $\beta(\theta,1)$ расподела. Наћи критичну област за тестирање хипотезе $H_0(\theta=\theta_0)$ против алтернативе $H_1(\theta\neq\theta_0)$ тестом количника веродостојности.

Задатак 189. Нека $\mathbf{X}_n$ има фамилију нормалних $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$ расподела, где је σ позната константа. С прагом значајности α, наћи критичну област за тестирање хипотезе $H_0(m\leq m_0)$ против алтернативе $H_1(m>m_0)$ тестом количника веродостојности.

Задатак 190. Нека $\mathbf{X}_n$ има фамилију нормалних $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$ расподела, где је σ сметајући параметар. С прагом значајности α, наћи критичну област за тестирање хипотезе $H_0(m\leq m_0)$ против алтернативе $H_1(m>m_0)$ тестом количника веродостојности.

Задатак 191. Нека $\mathbf{X}_n$ има фамилију нормалних $\mathcal{N}(m,1)$ расподела. С прагом значајности α, наћи критичну област за тестирање хипотезе $H_0(|m|\leq 1)$ против алтернативе $H_1(|m|>1)$ тестом количника веродостојности.

Задатак 192. Нека $\mathbf{X}_n$ има фамилију p-димензионих расподела чије су компоненте међусобно независне случајне величине с нормалним $\mathcal{N}(m_i,\sigma^2),\ i=1,...,p$, расподелама, где је σ сметајући параметар. Користећи тест количинка веродостојности одредити критичну област за тестирање хипотезе $H_0(m_1=m_2=\cdots=m_p)$ против алтернативе да је $m_i\neq m_j$ за бар један пар $(i,j),\ i\neq j,\ i,j\in\{1,...,p\}$.

Задатак 193. Нека $\mathbf{X}_n$ има фамилију експоненцијалних $\mathcal{E}(\theta)$ расподела, а $\mathbf{Y}_n$ фамилију експоненцијалних $\mathcal{E}(\lambda)$ расподела и нека су узорци независни. Наћи критичну област за тестирање хипотезе $H_0(\theta\lambda = 1)$ против алтернативе $H_1(\theta\lambda \neq 1)$ тестом количника веродостојности.

Задатак 194. Наћи критичну област за тестирање хипотезе $H_0(X \in \mathcal{N}(m, \sigma^2))$ против алтернативе $H_1(X \in U[\mu - \theta, \mu + \theta])$ тестом количника веродостојности.

Задатак 195. Нека $\mathbf{X}_n$ има фамилију бета $\beta(\theta, 1)$ расподела. Наћи критичну област Валдовог теста за хипотезу $H(\theta = \theta_0)$ против алтернативе $H_1(\theta \neq \theta_0)$.

Задатак 196. Нека $\mathbf{X}_n$ има фамилију бета $\beta(\theta, 1)$ расподела. Наћи критичну област скор теста за хипотезу $H(\theta = \theta_0)$ против алтернативе $H_1(\theta \neq \theta_0)$.

Задатак 197. Нека $\mathbf{X}_n$ има фамилију униформних $\mathcal{U}[0, \theta]$ расподела. За тестирање хипотезе $H_0(\theta = 1)$ против алтернативе $H_1(\theta > 1)$ предлаже се тест функција $\varphi_T = I\{|T_n| > k\}$, где је тест статистика $T_n = \sqrt{n}(2\bar{X} - 1)$.

а) У случају $n = 100$ одредити константу k тако да тест φ_T буде мере $\alpha = 0.05$.

б) Одредити функцију моћи теста. Да ли је тест φ_T непристрасан?

в) Да ли је овај тест униформно најмоћнији? Одговор образложити.

Задатак 198. Нека $\mathbf{X}_n$ има фамилију експоненцијалних $\mathcal{E}(\lambda)$ расподела. За тестирање $H_0(\lambda = 1)$ против $H_1(\lambda > 1)$ користи се тест с тест функцијом $\varphi(\boldsymbol{x}) = I\{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i \leq k\}$.

а) Одредити k тако да тест буде мере α.

б) Одредити статистику $p(\mathbf{X}_n)$ која представља $p-$вредност овог теста (фамилије тестова за различите α) и доказати да је стварно $p-$вредност.

в) За узорак обима 5 у коме је $\sum x_i = 4.2$ и праг значајности 0.05, донети закључак на основу реализоване $p-$вредности теста.

Задатак 199. Нека $\mathbf{X}_n$, $n = 6$ има фамилију расподела с густином $f(x;\theta) = \theta x^{\theta-1}$, $x \in (0, 1)$, $\theta > 0$.

а) Наћи униформно најмоћнији тест φ (с тест функцијом $\varphi(\mathbf{x})$) за тестирање нулте хипотезе $H_0(\theta = 1)$ против алтернативе $H_1(\theta < 1)$, чији је ниво значајности 0.05.

б) Израчунати моћ теста φ за $\theta = 0.75$.

в) Нека је $\alpha_0 < 0.05$ и нека је φ_0 униформно најмоћнији тест нивоа значајности α_0 за исту нулту и алтернативну хипотезу. Доказати да је за било које $\theta < 1$ моћ теста φ_0 мања од моћи теста φ.

Задатак 200. Нека $\mathbf{X}_n$ има фамилију расподела с густином $f(x;\beta) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\sqrt{x}\beta^{\frac{3}{2}}e^{-\beta x}$, $x > 0$, $\beta > 0$.

а) Наћи униформно најмоћнији тест φ (с тест функцијом $\varphi(\boldsymbol{x})$) за тестирање нулте хипотезе $H_0(\beta \geq 1)$ против алтернативе $H_1(\beta < 1)$, чији је ниво значајности 0.05.

б) Ако је дат узорак обима 8, код кога је $\sum_{k=1}^{8} x_k = 15.25$, колика је вредност тест функције и какав закључак доносимо?

Задатак 201. Нека $\mathbf{X}_n$ има фамилију Пуасонових $\mathcal{P}(\lambda)$ расподела и нека је априорна расподела за λ гама $\gamma(10, \frac{5}{6})$. За $n = 20$ и $\sum_{k=1}^{n} x_k = 177$ тестирати хипотезу $H_0(\lambda \leq 10)$ против алтернативе $H_1(\lambda > 10)$.

Задатак 202. Нека $\mathbf{X}_n$ има фамилију нормалних $\mathcal{N}(m, 16)$ расподела и нека је априорна расподела за m нормална $\mathcal{N}(0, 4)$. Тестирати хипотезу $H_0(m \in (-1, 1))$ против алтернативе $H_1(m \notin (-1, 1))$ за $n = 8$ и $\overline{x} = 1.4$.

Задатак 203. Нека $\mathbf{X}_n$ има фамилију геометријских $\mathcal{G}(p)$ расподела, где је априрона расподела параметра p бета $\beta(2, 2)$. За узорак $(3, 1, 6, 1)$ тестирати хипотезу $H_0(p < \frac{1}{4})$ ако је губитак прве врсте 2, а друге врсте 1.

Задатак 204. Нека $\mathbf{X}_n,\ n = 1$ има фамилију гама $\gamma(\alpha, 2),\ \alpha \in \mathbb{N}$, расподела. Априорна расподела за непознати параметар α је геометријска $\mathcal{G}(\frac{2}{3})$. За узорак $x = 1.5$ тестирати хипотезу $H_0(\alpha = 2)$ против алтернативе $H_1(\alpha = 1)$ ако је губитак прве врсте 3 пута већи од губитка друге врсте.

Задатак 205. Време чекања аутобуса на одређеној станици у одређеном периоду дана има униформну $\mathcal{U}(0, \theta)$ расподелу. Желимо да тестирамо $H_0(0 \leq \theta \leq 15)$ против $H_1(\theta > 15)$. Познато је да θ има Парето $\mathcal{P}a(5, 3)$ расподелу. Ако су добијена времена чекања 10,3,2,5 и 14, какав резултат даје ово тестирање?

Интервали поверења

Задатак 206. Нека $\mathbf{X}_n,\ n = 10$ има фамилију нормалних $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ расподела. Наћи 95% интервал поверења за

а) m (двострани);

б) σ^2 (једностране и двострани);

в) σ (једностране и двострани);

ако је $\overline{x}_{10} = 4.2$, а $\overline{s}^2_{10} = 0.49$.

Задатак 207. Нека $\mathbf{X}_n,\ n = 100$ има фамилију Бернулијевих $Ber(p)$ расподела. Наћи 95% интервал поверења за непознату вероватноћу p уколико у узорку има 45 нула и 55 јединица.

Задатак 208. Нека $\mathbf{X}_n$ има фамилију расподела са непознатом средњом вредношћу θ. Ако је $\overline{x}_n = 55$, а $\overline{s}^2_n = 1$, наћи 95% интервал поверења за θ, ако је:

а) $n = 100$;

б) $n = 10$.

Задатак 209. Нека $\mathbf{X}_n$ има фамилију Пуасонових $\mathcal{P}(\lambda)$ расподела. Одредити 90% интервал поверења за непознати параметар λ уколико је а) $\sum\limits_{k=1}^{100} x_k = 88$,

б) $\sum\limits_{k=1}^{6} x_k = 12$.

Задатак 210. У току 5 случајно одабраних година, бележен је број извесних космичких појава. Добијен је узорак $(3, 0, 4, 2, 2)$. Сматрајући да број ових појава годишње има Пуасонову расподелу, наћи 95% интервал поверења за средњи годишњи број појава.

Задатак 211. Нека $\mathbf{X}_n$ има фамилију Бернулијевих $Ber(p)$ расподела. Ако је $\sum\limits_{k=1}^{8} x_k = 5$, наћи 90% интервал поверења за p.

Задатак 212. Нови лек за ретку болест тестиран је на шест пацијената и помогао је у два случаја. Наћи 90% интервал поверења за вероватноћу да овај лек помогне код те болести.

Задатак 213. Нека $\mathbf{X}_n$ има фамилију униформних $U[0, \theta]$ расподела. Наћи 90% интервал поверења за непознати параметар θ ако је максимална вредност у узорку од 10 елемената 2.4.

Задатак 214. Нека $\mathbf{X}_n$, $n \geq 2$, има фамилију Паретових расподела с густином $f(x; \theta, \nu) = \theta \nu^\theta x^{-\theta-1}$, $x \geq \nu > 0$, $\theta > 0$, где је ν позната константа.

а) Одредити оцену максималне веродостојности $\hat{\theta}$ параметра θ.

б) Одредити $\theta_U(t)$ и $\theta_V(t)$ тако да буду решења једначина $F_T(t; \theta_U(t)) = \alpha_1$ и $F_T(t; \theta_V(t)) = 1 - \alpha_2$, где је $T = \frac{n}{\hat{\theta}}$.

в) Доказати да је $(\theta_U(T), \theta_V(T))$ интервал поверења за θ чији је ниво $1 - \alpha$, где је $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$.

г) Ако случајна величина U има унимодалну расподелу са густином $g(u)$, дефинисати услове које треба да задовољи интервал $[a, b]$ да би, за фиксирани ниво поверења $1-\alpha$, био најкраћи и од свих интервала са тим нивоом поверења. Одредити изразе из којих се добија најкраћии интервал за параметар θ код Паретове расподеле.

Задатак 215. Сабрано је 1000 случајних бројева из интервала $[0, \theta]$ и добијен је збир 716.42. Наћи 99% интервал поверења за непознати параметар θ.

Задатак 216. Нека $\mathbf{X}_n$ има фамилију померених експонецијалних расподела с густином $f(x; \theta) = e^{\theta - x}$, $x > \theta$, $\theta \in \mathbb{R}$.

а) Наћи довољну статистику T_n за параметар θ.

б) Нека ненегативна случајна величина Y има густину $g(y)$ која је строго опадајућа функција на $[0, \infty)$. Доказати да је, за фиксирано α, од свих интервала $[a, b]$ за које је $\int_a^b g(y)dy = 1-\alpha$, најкраћи онај код кога је $a = 0$.

в) Наћи стожерну величину за параметар θ која је функција од T_n, а затим и оптимални (тј. најкраћи) 90% интервал поверења за параметар θ.

Задатак 217. Нека $\mathbf{X}_n$ има фамилију померених експонецијалних расподела с густином $f(x;\lambda,\theta) = \lambda e^{-\lambda(x-\theta)}$, $x > \theta$, $\lambda > 0$, $\theta \in \mathbb{R}$.

а) Користећи $T_1(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^{n}(X_i - X_{(1)})$, одредити интервал поверења за λ са нивоом поверења $1-\alpha$ и одредити очекивану дужину интервала.

б) Користећи $T_1(\mathbf{X})$ и $T_2(\mathbf{X}) = X_{(1)}$, одредити регион поверења за дводимензионални параметар (λ,θ) са нивоом поверења $1-\alpha$.

Задатак 218. Нека $\mathbf{X}_n$, $n = 39$ има фамилију густина расподеле $f(x)$. Наћи ниво поверења интервала $(X_{(8)}, X_{(34)})$ за медијану расподеле, користећи

а) тачну вероватноћу,

б) апроксимацију нормалном расподелом уз корекцију непрекидности.

Задатак 219. Нека $\mathbf{X}_n$ има фамилију Кошијевих $C(\theta)$ расподела. На основу узорка

$$(3, 7, 1, -1, 6, 4, 7, 2, 1, 5, 0, 2, 2)$$

наћи интервал поверења за параметар θ чији је ниво приближно 90%.

Задатак 220. Нека $\mathbf{X}_n$ има фамилију гама $\gamma(\alpha,\beta)$ расподела. Одредити приближни 95% интервал поверења за α извртањем теста количника веродостојности.

Задатак 221. Нека $\mathbf{X}_n$ има фамилију Бернулијевих $Ber(p)$ расподела.

а) Одредити тест статистику за тестирање хипотезе $H_0 : p = p_0$ против алтернативе $H_1 : p \neq p_0$ скор тестом.

б) Одредити 95% интервал поверења за непознати параметар p настао извртањем горепоменутог скор теста, ако је $\sum_{i=1}^{50} x_i = 35$.

Задатак 222. Нека $\mathbf{X}_n$ има фамилију расподела са густином $f(x) = \theta e^{-\theta(x-2)}, x \geq 2$.

а) Одредити стожерну величину за параметар θ и одредити 95% интервал поверења за θ.

б) Одредити 95% интервал поверења за параметар θ извртањем Валдовог теста.

в) Уколико је дат узорак $(2.3, 2.6, 3.3, 4.1, 4.6)$, одредити интервале из претходна два дела и упоредити их. Којем од ова два интервала бисте више веровали и зашто?

Интервали прекривања

Задатак 223. Наћи најкраћи 90% интервал прекривања за λ на основу узорка $x = 2$ (обима 1) из Пуасонове $\mathcal{P}(\lambda)$ расподеле, ако је априорна расподела за λ неправа $\pi(\lambda) \sim \frac{1}{\lambda^2}$.

Задатак 224. Наћи 99% интервал прекривања за податке из задатка 127, ако је извршено десет тестова на којима је средња вредност 125. Упоредити овај интервал прекривања са класичним интервалом поверења истог нивоа.

Задатак 225. Нека $\mathbf{X}_n,\ n = 20$ има фамилију нормалних $\mathcal{N}(m, 1)$ расподела. Параметар m има неправу априорну расподелу $\pi(m) \sim 1,\ m \in \mathbb{R}$. Наћи апостериорну расподелу за параметар m на основу узорка у коме је $\overline{x}_{20} = 10$. Затим наћи 95% интервал прекривања за m.

Задатак 226. Нека $\mathbf{X}_n,\ n = 6$ има фамилију експоненцијалних $\mathcal{E}(\theta)$ расподела и нека θ има Џефрисову априорну расподелу. Наћи апостериорну расподелу и двострани 95% интервал прекривања за θ ако је $\sum\limits_{k=1}^{6} x_k = 18$.

Задатак 227. Нека $\mathbf{X}_n$ има фамилију Пуасонових $\mathcal{P}(\lambda)$ расподела и нека λ има Џефрисову априорну расподелу. Наћи апостериорну расподелу и двострани 99% интервал прекривања за λ ако је $\sum\limits_{k=1}^{10} x_k = 13$.

Задатак 228. Нека $\mathbf{X}_n$ има фамилију експоненцијалних $\mathcal{E}(\theta),\ \theta > 0$, расподела и нека је априорна расподела параметра θ неправа расподела $\pi(\theta) \sim \frac{1}{\theta}, \theta > 0$.

а) На основу узорка обима 10 у коме је $\sum x_i = 8$ наћи Бајесов интервал прекривања (a, b) нивоа $1 - \alpha$, такав да важи $P\{\theta < a\} = P\{\theta > b\} = \frac{\alpha}{2}$.

б) Доказати да интервал добијен под а) није НАГ.

Статистичка теорија одлучивања

Задатак 229. Инвеститор одлучује хоће ли уложити у неизвесне деонице које могу да донесу профит од 500$ ако су успешне, или губитак од 1000$ ако су неуспешне. Друга могућност улагања је сигурна инвестиција која доноси зараду од 200$. Наћи оптималну минимаксну и Бајесову одлуку уколико је вероватноћа да деонице буду успешне 0.9.

Задатак 230. Дата је таблица губитака за три одлуке a_1, a_2 и a_3 при три вредности непознатог параметра θ:

$L(\theta, a)$	a_1	a_2	a_3
θ_1	1	1	4
θ_2	-1	5	5
θ_3	0	-1	-1

Наћи оптималну минимаксну и Бајесову одлуку ако је априорна расподела параметра θ: $\pi(\theta_1) = 0.2, \pi(\theta_2) = 0.1, \pi(\theta_3) = 0.7$.

Задатак 231. Дата је таблица губитака за три одлуке a_1, a_2 и a_3 при три вредности непознатог параметра θ.

$L(\theta, a)$	a_1	a_2	a_3
θ_1	-10	-5	-3
θ_2	-5	-5	-2
θ_3	1	0	1

а) Испитати допустивост одлука.

б) Наћи оптималну Бајесову одлуку ако је априорна расподела параметра θ: $\pi(\theta_1) = 0.2, \pi(\theta_2) = 0.3, \pi(\theta_3) = 0.5$.

в) Наћи оптималну одлуку по минимаксном принципу.

Задатак 232. Нека $\mathbf{X}_n,\ n = 1$ има фамилију Бернулијевих расподела с параметром $\theta, \theta \in \{\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\}$. Дата је таблица губитака за две одлуке a_1 и a_2:

$L(\theta, a)$	a_1	a_2
$\frac{1}{4}$	1	4
$\frac{1}{2}$	3	2

Наћи оптималну функцију одлучивања по минимаксном принципу.

Задатак 233. За текст из претходног задатка:

а) Одредити оптималну функцију одлучивања по Бајесовом принципу ако је априорна расподела параметра $\theta : \pi(\frac{1}{4}) = \frac{1}{3}, \pi(\frac{1}{2}) = \frac{2}{3}$.

б) Наћи и оптималну одлуку уколико је узорак $x = 1$.

в) Наћи оптималну одлуку уколико је узорак $\boldsymbol{x} = (1, 1)$.

Задатак 234. Нека $\mathbf{X}_n,\ n = 1$ има геометријску $\mathcal{G}(1-\theta)$ расподелу, где је $\theta \in \{0.1, 0.2\}$. Скуп одлука A сад садржи два елемента при чему је функција губитака L дата следећом табелом:

$L(\theta, a)$	a_1	a_2
0.1	0	1
0.2	2	0

Скуп свих функција одлучивања D састоји се из 5 функција облика

$$d_j(x) = \begin{cases} a_1, & x \in \{1, \dots, j\} \\ a_2, & x \in \{j+1, j+2 \dots\} \end{cases}, \quad j \in \{1, \dots, 5\}.$$

Наћи оптималну функцију одлучивања по минимаксном принципу.

Задатак 235. Авиопревозно предузеће има понуду за куповину контигента од десет авиона исте марке. Од њих, један непознати број θ може да изведе 1000 часова лета без квара, при чему сваки такав авион доноси добитак p. Ако се поквари у току тих 1000 часова, авион доноси губитак q. Пре него што се донесе одлука, предузеће изводи пробни лет једним од авиона и плаћа трошак r.

а) Одредити функцију ризика за све четири могуће функције одлучивања.

б) За $p = 2, q = 3, r = 1$ наћи оптималну минимаксну функцију одлучивања.

в) За исте вредности p, q, r, ако број „исправних” авиона θ има априорну дискретну униформну расподелу, наћи оптималну Бајесову функцију одлучивања.

Задатак 236. Грађевински инжењер треба да одлучи да ли да постави челилчни део од 40 или 50 метара у зависности од тога да ли је чврсто тло на $\theta_1 = 40$ или $\theta_2 = 50$ метара испод земље. Губици у случају погрешне одлуке су 100$ ако треба скраћивати део, односно 400$ ако га треба продужити. Дубина на којој је чврсто тло може се мерити електронским уређајем који приказује дубине с вероватноћама датим у следећој табели:

измерена дубина	$\theta = 40$	$\theta = 50$
$40m$	0.6	0.1
$45m$	0.3	0.2
$50m$	0.1	0.7

а) Наћи оптималну минимаксну функцију одлучивања.

б) Наћи оптималну Бајесову функцију одлучивања ако је априорна расподела параметра θ : $\pi(40) = 0.8, \pi(50) = 0.2$.

в) Која је оптимална Бајесова одлука ако је уређај измерио дубину од 45 метара?

Задатак 237. Нека $\mathbf{X}_n$ има фамилију Бернулијевих расподела са параметром θ, где је априорна расподела параметра θ униформна $\mathcal{U}[0,1]$. Треба донети једну од три одлуке при чему је функција губитака

$$L(\theta, a_1) = \theta^2,\ L(\theta, a_2) = 1 - \theta,\ L(\theta, a_3) = \frac{\theta}{2}.$$

Наћи оптималну Бајесову одлуку ако је $n = 8$, а $\sum\limits_{k=1}^{n} x_k = 6$.

Задатак 238. Особа се не осећа добро и иде код лекара. Могуће су две дијагнозе: прехлада (θ_1) и бактеријска инфекција (θ_2). Лекар има две могућности: да предложи пацијенту да пије чај или да препише антибиотике. Таблица губитака је:

$L(a,\theta)$	прехлада	инфекција
чај	0	10
антибиотик	1	0

Пре доношења одлуке лекар ради анализу крви пацијенту, која показује да ли је инфекција или није. Међутим, тестирањем крви може се направити грешка. Претпоставља се да важи следеће

$P(X\|\theta_j)$	прехлада	инфекција
јесте инфекција	0.2	0.7
није инфекција	0.8	0.3

а) Одредити оптималну минимаксну функцију одлучивања.

б) Ако је априорна расподела $\pi(\theta_1) = 0.9, \pi(\theta_2) = 0.1$, одредити оптималну одлуку по Бајесовом принципу ако јесте у питању инфекција.

Задатак 239. Студент треба да донесе одлуку да ли да изабере курс само на основу одслушаног једног часа. Постоје три категорије курса по његовом мишљењу: добар (θ_1), осредњи (θ_2) и лош (θ_3). Из претходног искуства зна да је:

$$\theta : \begin{pmatrix} \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 \\ 0.2 & 0.4 & 0.4 \end{pmatrix}.$$

Студент такође претпоставља који су узроци тога:

$P(X\|\theta_j)$	добар	осредњи	лош
занимљива предавања	0.8	0.5	0.1
незанимљива предавања	0.2	0.5	0.9

Таблица губитака је:

$L(a,\theta)$	добар	осредњи	лош
узима курс	0	5	10
не узима курс	20	0	0

Одредити оптималну одлуку по Бајесовом принципу ако су на одслушаном часу предавања била занимљива.

Задатак 240. "Тротер независни трговци", Дел Бој и Родни, имају прилику за посао са мушким перикама. Могу купити 1000 перика по цени од 700 или могу одустати од куповине. Са једног непознатог броја перика ће убрзо кренути да опада длака, и такве перике се не би продале, а остале би се, због великог интересовања тржишта, продавале по цени 15 за једну. Пажљиви Дел Бој није сигуран, па пре коначне одлуке тражи и добија бесплатно једну перику да испита њен квалитет, на основу чега ће донети коначну одлуку. Помозите Дел Боју и Роднију да донесу праву одлуку и постану милионери.

а) Наћи оптималну минимаксну функцију одлучивања.

б) Ако је познато да број фаличних перика има биномну $\mathcal{B}(1000, 0.8)$ расподелу, наћи оптималну Бајесову функцију одлучивања.

Непараметарски статистички тестови

Задатак 241. У датом временском интервалу од једног часа, у пет узастопних дана, на један шалтер дошло је редом 60, 73, 48, 56 и 78 лица. С прагом значајности 0.05 испитати да ли је средњи број лица који долазе на шалтер исти у току свих 5 дана.

Задатак 242. У 200 бацања две коцкице добијен је збир 7 у 20 бацања, а збир 11 у 14 бацања. С прагом значајности 0.05 испитати да ли су коцкице исправне.

Задатак 243. С прагом значајности 0.01 испитати да ли је узорак

интервал	0-7.5	7.5-20	>20
број понављања	7	5	8

из експоненцијалне расподеле.

Задатак 244. Из популације чије је обележје X извучен је узорак:

X_k	[0,1]	[1.5,2.5]	(2.5,3.5]	(3.5,5]
M_k	52	35	9	4

Са прагом значајности 0.02 тестирати хипотезу да обележје X има експоненцијалну расподелу.

Задатак 245. Претпоставља се да број људи који уђу у једну банку у центру града у току једног минута има Пуасонову расподелу. Посматрано је 200 једноминутних периода у различитим периодима током једне недеље и добијени су следећи резултати:

број долазака	0	1	2	3	4	5	6	7	8 и више
број минута	14	31	47	41	29	21	10	5	2

На пример, ниједна особа није дошла током 14 минута од укупно 200 посматраних и слично за остале вредности. Наћи приближну оцену параметра λ и с нивоом значајности од 5% испитати да ли је претпоставка о Пуасоновој расподели броја људи који уђу у банку тачна.

Задатак 246**.** Дат је узорак 1.2, 3.1, 5.1, 6.7. Испитати да ли је узорак из експоненцијалне $\mathcal{E}(0.2)$ расподеле тестом Колмогорова са нивоом значајности 0.1.

Задатак 247**.** Дат је узорак тренутака отказа машине у часовима

интервал	0-20	20-40	40-60	60-80	80-100
број понављања	2	8	13	17	10

С прагом значајности 0.01 испитати да ли тренутак отказа има униформну $U[0, 100]$ расподелу.

Задатак 248**.** Испитати с прагом значајности 0.05 да ли је узорак 0.3, 0.7, 0.9, 1.2, 1.4, 1.5, 1.6, 1.9, 2.0, 2.1, 2.3, 2.5, 2.6, 2.7, 3.0, 3.8, 3.9, 4.0 узет из нормалне $\mathcal{N}(2, 1)$ расподеле.

Задатак 249**.** Претпоставља се да број минута који радници у току радног дана потроше на остале активности има нормалну расподелу са средњом вредношћу 120 и стандардним одступањем 10. Да би се то проверило, узет је узорак од 10 радника и добијени су следећи резултати: 108, 112, 117, 130, 111, 131, 110, 113, 105, 128. Испитати тачност ове претпоставке тестом Колмогорова с прагом значајности 0.1.