Зора Голубовић z.golubovic@yahoo.com

1 Математика 3

2 Варијациони рачун (за Б смер), Лапласова и Фуријеова трансформација (за Ц смер)

2.1 Варијациони рачун

1. Наћи екстремале функционала:

а) $J[y] = \int\limits_{-1}^{0}(12xy - y'^2)dx$, $y(-1) = 1$, $y(0) = 0$,

б) $J[y] = \int\limits_{1}^{2}(y'^2 + 2yy' + y^2)dx$, $y(1) = 1$, $y(2) = 0$,

в) $J[y] = \int\limits_{0}^{1} yy'^2 dx$, $y(0) = 1$, $y(1) = \sqrt[3]{4}$,

г) $J[y] = \int\limits_{0}^{\pi}(4y\cos x + y'^2 - y^2)dx$, $y(0) = 0$, $y(\pi) = 0$.

Решење. а) Ојлер-Лагранжова једначина је облика $6x - y'' = 0$, $y = x^3 + Cx + D$, одакле се сменом у граничне услове добија систем $-1 - C + D = 1$, $D = 0$, па је $y = x^3 - 2x$ екстремала посматраног функционала.
б) $-y'' - y' + 2y = 0$ има опште решење облика $y(x) = C_1e^x + C_2e^{-2x}$, па се сменом у граничне услове добија систем једначина $C_1e + C_2e^{-2} = 1$, $C_2e^2 + C_2e^{-4} = 0$, чије решење је $C_2 = \frac{e^2}{e^{-3}-1}$, $C_1 = 1 - C_2e^{-2}$.
в) $-y'^2 - 2yy'' = 0$ је диференцијална једначина која се решава сменом $z = y'$: $-z^2 - 2yz'z = 0$, одакле је $z = 0$, $y = C$ или $z' + \frac{z}{2y} = 0$, $y \neq 0$, што је диференцијална једначина првог реда $(\sqrt{y}z)' = 0$, $z = \frac{C}{\sqrt{y}}$, $\sqrt{y}dy = Cdx$, $y = (\frac{3}{2}Cx + \frac{3}{2}D)^{\frac{2}{3}}$. Из граничних услова се добијају екстремале, $y(x) = (x+1)^{\frac{2}{3}}$, $y(x) = (-3x+1)^{\frac{2}{3}}$.
г) $y'' + y - 2\cos x = 0$ је диференцијалнаједначина чији хомогени део решења је $C_1\cos x + C_2\sin x$, а партикуларни део решења је облика $y_p = (ax+b)\cos x + (cx+d)\sin x$, односно након смене у диференцијалну једначину $y_p = b\cos x + (x+d)\sin x$. Дакле, опште решење је $y = (x + D_2)\sin x + D_1\cos x$, одакле се сменом у граничне услове налазе екстремале $y = (x + D_2)\sin x$.

2. Наћи екстремале функционала: а) $J[y(x),z(x)]=\int\limits_1^2(y'^2+z^2+z'^2)dx$ $y(1)=1$, $y(2)=2$, $z(1)=0$, $z(2)=1$,
б) $J[y(x),z(x)]=\int\limits_1^2(2yz-2y^2+y'^2-z'^2)dx$ $y(0)=0$, $y(\pi)=1$, $z(0)=0$, $z(\pi)=-1$.

Решење. а) Ојлер-Лагранжов систем је облика

$$y''=0,$$

$$z-z''=0,$$

одакле је

$$y=C_1x+C_2,$$
$$z=C_3e^x+C_4e^{-x}.$$

Из граничних услова се добија екстремала

$$y=x,$$

$$z=\frac{\sinh(x-1)}{\sinh 1}$$

. б) Ојлер-Лагранжов систем је облика

$$y''+2y-z=0,$$

$$z''-y=0,$$

одакле је елиминацијом z,

$$y^{(IV)}+2y''+y=0,$$
$$y=C_1\cos x+C_2\sin x+x(C_3\cos x+C_4\sin x),$$
$$z=y''+y.$$

Из граничних услова се добија екстремала

$$y=C_2\sin x-\frac{x}{\pi}\cos x,$$

$$z=C_2\sin x+\frac{1}{\pi}(2\sin x-x\cos x),$$

где је C_2 произвољна константа.

2.2 Фуријеова трансформација и интеграл

3. Наћи Фуријеову трансформацију функције $f(x)=e^{-a|x|}$, $a>0$.

Решење. Функција задовољава Дирихлеове услове и апсолутно је интеграбилна на реалној правој ($\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)| = 2\int_0^{\infty}e^{-ax} = \frac{2}{a}$). $F(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-i\lambda x}dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty}e^{-ax}\cos\lambda x dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{a}{a^2+\lambda^2}$.

4. Представити у форми Фуријеовог интеграла функцију

$$f(x) = \begin{cases} x, & |x| \leqslant 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$$

Решење. Функција је дефинисана на реалној оси, део-по-део монотона, има две тачке прекида 1. реда и апсолутно је интеграбилна $\int\limits_{-\infty}^{infty}|f(x)|dx = \int\limits_{-1}^{1}|x|dx = x^2|_0^1 = 1$. Дакле, функција се може представити Фуријеовим интегралом. Функција је непарна, па је $a(\lambda) = 0$; $b(\lambda) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}f(t)\sin\lambda t = \frac{2}{\pi\lambda^2}(\sin\lambda - \lambda\cos\lambda)$. У тачкама непрекидности (за $x \neq \pm 1$) је $f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{1}{\lambda^2}(\sin\lambda - \lambda\cos\lambda)\sin(\lambda x)d\lambda$, а у тачкама прекида $x = \pm 1$ је $\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{1}{\lambda^2}(\sin\lambda - \lambda\cos\lambda)\sin(\lambda x)d\lambda = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$.