Зимски семестар 2023/2024 Вежбе из Математике 3
Зора Голубовић z.golubovic@yahoo.com

1 Математика 3

1.1 Диференцијалне једначине

1.2 Степени редови

1. У близини координатног почетка одредити опште решење диференцијалне једначине $2(x^2 + x^3)y'' - (x - 3x^2)y' + y = 0$.

Решење. $y_1(x) = \frac{c_1 x + c_2 |x|^{\frac{1}{2}}}{1+x}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

2. Решити диференцијалну једначину $x^2y'' + (x^2 - 3x)y' - (x - 4)y = 0$.

Решење. $y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$, $y_1(x) = x^2e^{-x}$,
$y_2(x) = x^2 \ln|x|e^{-x} + x^2(x - \frac{3}{4}x^2 + \frac{11}{36}x^3 + \dots)$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

1.3 Гринова функција

$$G(t,s) = \begin{cases} \frac{x_1(t)x_2(s)}{W(s)}, & \alpha \leqslant t \leqslant s, \\ \frac{x_1(s)x_2(t)}{W(s)}, & s \leqslant t \leqslant \beta. \end{cases}$$

3. Наћи Гринову функцију за гранични задатак $t^2x'' - 2x = f(x)$, $x(1) = 0$, $x(2) + 2x'(2) = 0$.

Решење.

$$G(t,s) = \begin{cases} \frac{1-t^3}{3st}, & 1 \leqslant t \leqslant s, \\ \frac{1-s^3}{3st}, & s \leqslant t \leqslant 2. \end{cases}$$

1.4 Парцијалне диференцијалне једначине 1. реда

4. Решити Кошијев проблем хомогене линеарне парцијалне диференцијалне једначине $(z-y)\frac{\partial u}{\partial x}+z\frac{\partial u}{\partial y}+y\frac{\partial u}{\partial z}=0$, $u|_{x=1}=y+z$.

Решење.

5. Решити хомогену линеарну парцијалну диференцијалну једначину $(2z-3y)\frac{\partial u}{\partial x}+(3x-z)\frac{\partial u}{\partial y}+(y-2x)\frac{\partial u}{\partial z}=0$.

Решење.

6. Одредити једначину површи G која садржи круг $x^2+y^2=r^2$, $z=h$ и ортогонална је на фамилију хиперболоида $xy=cz^2$, $h,r,c\neq 0$.

Решење.

7. Решити Пфафове једначине $dz=(2x^2+2xz+2xy^2-1)d-2ydy$ $\ (\cos x+e^x)dx+(e^x+e^yz)dy+e^ydz=0$.

Решење.

8. Наћи потпуни, општи и сингуларни интеграл једначине $p=(qy+z)^2$ и одредити услове постојања Кошијевог интеграла који садржи криву $y=1$, $z=g(x)$.

Решење.

9. Одредити потпуне интеграле посебних типова парцијалних диференцијалних једначина
1. $A(x,p)=B(y,q)$ (парцијална диференцијална једначина која раздваја променљиве),
2. $z=xp+yq+f(p,q)$ (Клерова парцијална диференцијална једначина),
3. $F(z,p,q)=0$.

Решење.