Зимски семестар 2023/2024 Вежбе из Математике 3
Зора Голубовић z.golubovic@yahoo.com

1 Математика 3

1.1 Диференцијалне једначине

1.2 Лагранжова и Клерова диференцијална једначина

1. Решити диференцијалну једначину $y = 3xy' - 7y'^3$.

Решење.

2. Решити диференцијалну једначину $y = xy' + \sqrt{y'^2 + 1}$.

Решење.

3. Решити диференцијалну једначину $\ln y' + xy' + ay + b = 0$.

Решење.

4. Решити диференцијалну једначину $yy'^2 + axy' + by = 0$, $a \neq 0$, $b \neq 0$.

Решење.

1.3 Неки интеграбилни типови нелинеарних диференцијалних једначина n-тог реда

- $F(x, y^{(n)}) = 0$ је најједноставнија диференцијална једначина чије се опште решење добија узастопном интеграцијом n пута. Ова једначина нема сингуларних решења.
- $F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots y^{(n)}) = 0$ се сменом $y^{(k)} = z$ трансформише у диференцијалну једначину нижег реда.
- Ако је диференцијална једначина облика $f(y, y', y'', \dots y^{(n)}) = 0$, ред диференцијалне једначине се снижава за једна сменом $y' = z$, где је $y \neq const$ нова независно променљива, а $z = z(y)$ нова непозната функција.
- Диференцијалној једначини хомогенитета m, односно

  $$F(x, ty, ty', \dots ty^{(n)}) = t^m F(x, y, y', \dots y^{(n)})$$

  ред се снижава сменом $y' = yz$, где је $z = z(x)$ нова непозната функција.
- Ако је диференцијална једначина уопштена хомогена диференцијална једначина

  $$F(e^t x, e^{kt} y, e^{(k-1)t} y', \dots e^{(k-n)t} y^{(n)}) = e^{mt} F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) \text{ за неке } k \text{ и } m,$$

  једначина се трансформише у једначину трећег типа параметризацијом $x = e^t$, $y = ue^{kt}$, где је t нова независно променљива, а $u = u(t)$ нова непозната функција.

5. Решити диференцијалну једначину $x = \frac{y''}{1+y''^2}$

Решење. $y'' = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ има опште решење $-\frac{1}{2}\arcsin x - \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + c_1 x + c_2$, $|x| < 1$.

6. Решити диференцијалну једначину $y'' + 2y' = e^x y'^2$.

Решење. $y = -e^{-x} - c_1 x + c_1 \ln|1 + c_1 e^x| + c_2$, $y = c$.

7. Решити диференцијалну једначину $y''^2 = 4(y' - 1)$.

Решење. $y = x + \frac{1}{3}(x + c_1)^3 + c_2$, $y = x + c$.

8. Решити диференцијалну једначину $y'' = \frac{\ln x}{x}$, $x > 0$.

Решење. $y = \frac{1}{2}x \ln^2 x - x\ln x + x + C_1 x + C_2$.

9. Решити диференцијалну једначину $x - \sin y'' + 2y'' = 0$.

Решење. $dy = (t \sin t + \cos t - t^2 + C_1)(\cos t - 2)dt$.

10. Одредити сва решења диференцијалне једначине $y'' - xy''' + y'''^3 = 0$ која задовољавају почетне услове $y(1) = 1$, $y'(1) = 0$, $y''(1) = 0$.

Решење. $y = C_1 \frac{x^3}{6} - C_1^3 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3$ је опште решење, $y = \pm \frac{8}{105\sqrt{3}} x^{\frac{7}{2}} + C_4 x + C_5$ је сингуларно решење за $u \neq 0$. постоје 3 решења која задовољавају почетне услове.

11. Решити диференцијалну једначину $yy'' - 2yy' \ln y - y'^2 = 0$, $y > 0$.

Решење.

12. Одредити опште решење диференцијалне једначине $y(xy'' + y') = xy'^2(1 - x)$.

Решење.

13. Решити диференцијалну једначину $x^3 y'' + 2xyy' - x^2 y'^2 - y^2 = 0$.

Решење.

1.4 Линеарне диференцијалне једначине n-тог реда

$y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + \cdots + p_n(x) y = f(x)$ је канонски облик линеарне дифренцијалне једначине n-тог реда (за $f(x) = 0$ добија се одговарајућа хомогена линеарна диференцијална једначина. Скуп решења посматране једначине образује векторски простор над пољем $\mathbb{R}(\mathbb{C})$.