Зора Голубовић z.golubovic@yahoo.com

# 1 Математика 3

## 1.1 Фуријеови редови

**1.** Функцију задату са

$$f(x)=\begin{cases}\cos x, & |x|\leqslant \frac{\pi}{2};\\ 0, & \frac{\pi}{2}<|x|\leqslant \pi.\end{cases}$$

и $2\pi$-периодично продужену, развити у Фуријеов ред и наћи суме редова $\sum\limits_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^k\sin 2k}{(2k-1)2k(2k+1)}$, $\sum\limits_{k=2}^{\infty}\frac{1}{(4k^2-1)^2}$.

**2.** Функцију задату са

$$f_h(x)=\begin{cases}\cos\frac{\pi x}{4h}, & |x|\leqslant 2h;\\ 0, & 2h<|x|\leqslant \pi.\end{cases}$$

за $0<h\leqslant\frac{\pi}{2}$ и $2\pi$-периодично продужену, развити у Фуријеов ред и наћи суме редова $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\cos^2 2k}{\pi^2-4k^2}$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(4k^2-1)^2}$.

**3.** Функцију задату са

$$f_h(x)=\begin{cases}1-\frac{x^2}{4h^2}, & |x|\leqslant 2h;\\ 0, & 2h<|x|\leqslant \pi.\end{cases}$$

за $0<h\leqslant\frac{\pi}{2}$ и $2\pi$-периодично продужену, развити у Фуријеов ред и наћи суме редова $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k(\sin(2k)-2k\cos(2k))}{k^3}$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k)-2k\cos(2k)}{k^3}$,

## 1.2 Диференцијалне једначине

### 1.2.1 Дарбуова диференцијална једначина

Дарбуова ДЈ је ДЈ $M(x,y)dx+N(x,y)dy+P(x,y)(xdy-ydx)=0$, где су $M$ и $N$ хомогенитета $\alpha$, а $P$ хомогенитета $\beta$. Ако је $\beta-\alpha+2\neq 0$ или $\beta-\alpha+1\neq 0$, једначина се сменом $y=xz$ своди на Бернулијеву ДЈ и добија се ДЈ $(M(1,z)+zN(1,z))dx+$

$N(1,z)xdz + P(1,z)x^{\beta-\alpha+2}dz = 0$. Посебно треба испитати да ли су $y = z_0x$, $x < 0$ и $y = z_0x$, $x > 0$ решења (овде је $M(1,z_0) + z_0N(1,z_0) = 0$). Ако је $\beta - \alpha + 2 = 0$ једначина је линеарна, а ако је $\beta - \alpha + 1 = 0$ хомогена.

**4.** Одредити опште решење $(x^2 - y^2)dx + xydy + kyx^{m+1}(xdy - ydx) = 0$.

**Решење.** Једначина је Дарбуова, при чему су $M$ и $N$ хомогенитета 2, а $P$ хомогенитета $m+2$. Сменом $xy = z$ се добија $(1 - z^2 + z^2)dx + zxdz + kzx^{m+2}dz = 0$, односно $x' + zx = -kzx^{m+2}$. Ако је $m + 2 \neq 2$ и $m + 2 \neq 1$ добија се Бернулијева ДЈ која се решава сменом $x^{-(m+1)} = v$. Лако се добија $v' - zv(m+1) = k(m+1)z$ одакле имамо $v = -k + Ce^{\frac{m+1}{2}z^2}$, односно $x^{-(m+1)} = Ce^{\frac{m+1}{2}\frac{y^2}{x^2}} - k$. Ако је $m + 2 = 1$, добија се хомогена линеарна ДЈ $x' + zx = -kzx$, односно $x' + (k+1)zx = 0$, чије решење је $x = Ce^{-\frac{(k+1)y^2}{2x^2}}$. Ако је $m + 2 = 0$, имамо ДЈ $x' + (k+x)z = 0$, одакле је $x = Ce^{-\frac{y^2}{2x^2}} - k$.

### 1.2.2 Рикатијева диференцијална једначина

Рикатијева ДЈ је ДЈ облика $y' = p(x)y^2 + q(x)y + r(x)$, где су $p, q, r \in C(a,b)$. ДЈ нема сингуларних рехења, а област егзистенције и јединствености решења је $(a,b) \times (-\infty, \infty)$. Постоји неколико подтипова које ћемо решавати: 1) $y' = f(x)(ay^2 + by + c)$,
2) $y' = \frac{a}{x^2} + \frac{b}{x}y + c$,
3) $y' = \frac{a}{x}y^2 + \frac{1}{2x}y + c$, која се решава сменом $y = \sqrt{x}z$,
4) $y' = ay^2 + \frac{b}{x}y + \frac{c}{x^2}$, која се решава сменом $xy = z$.
Ако је познато партикуларно решење $\varphi_1$ Рикатијеве једначине, опште решење је облика $y = \varphi_1(x) + \frac{1}{z}$.

**5.** Урадити задатке 57 и 86 из збирке Ј. Кнежевић-Миљановић.

**Решење.** Збирка Диференцијалне једначине 1, Задаци са елементима теорије: Ако су позната два партикуларна решења Рикатијеве ДЈ $\varphi_i(x)$, $i = 1,2$, опште решење је облика $\frac{y(x)-\varphi_1(x)}{y(x)-\varphi_2(x)} = Ce^{\int p(x)(\varphi_1(x)-\varphi_2(x))dx}$, а ако су позната три партикуларна решења $\varphi_i(x)$, $i = 1,2,3$, опште решење је $\frac{y(x)-\varphi_2(x)}{y(x)-\varphi_1(x)} : \frac{\varphi_3(x)-\varphi_2(x)}{\varphi_3(x)-\varphi_1(x)} = C_1$.

**6.** Решити $x^2y' + x^2y^2 + xy = 4$, ако је познато да су партикуларна решења облика $f(x)$ и $f(-x)$.

**Решење.**

$$x^2f'(x) + x^2f^2(x) + xf(x) = 4,$$
$$-x^2f'(-x) + x^2f(-x) + xf(x) = 4.$$

Сменом $-x$ у другу једначину, добија се

$$-x^2f'(x) + x^2f^2(x) - xf(x) = 4.$$

Сабирањем прве и последње једначине се добија

$$x^2f^2(x) = 4,$$

односно $f(x) = \pm\frac{2}{x}$. Решење се налази из претходног задатка,

$$\frac{y - \frac{2}{x}}{y + \frac{2}{x}} = Ce^{-\int \frac{4}{x}dx} = \frac{C}{x^4}.$$

$x = 0$ је партикуларно решење које се добија за $C = 0$.

**7.** Решити $y' + y^2 + \frac{y}{x} - \frac{4}{x^2} = 0$.

**Решење.** Ово је подтип 4 и решава се сменом $xy = z$, $y' = \frac{z'x-z}{x^2}$. Добија се $z'x = 4 - z^2$, одакле следи $\left(\frac{z+2}{2-z}\right) = Cx^4$, односно $y = \frac{2Cx^4-2}{x+Cx^5}$.

### 1.2.3 Диференцијална једначина са тоталним диференцијалом

Диференцијална једначина са тоталним диференцијалом је диференцијална једначина облика $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$, при чему су $M, N$ дефинисане и непрекидне у $G \subset \mathbb{R}^2$.

**Теорема.** Нека су $M, N, M'_y, N'_x$ дефинисане и непрекидне функције у $G$, при чему је $M^2(x,y) + N^2(x,y) \neq 0$ за свако $(x,y) \in G$. Једначина $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ је једначина са тоталним диференцијалом акко $M'_y = N'_x$ за свако $(x,y) \in G$.

$$F'_x = M,$$

одакле се интеграцијом добија

$$F(x,y) = \int_{x_0}^{x} M(t,y)dt + \varphi(y),$$

$$F'_y = \int_{x_0}^{x} M(t,y)dt + \varphi'(y) = N(x,y).$$

Како је $M'_y = N'_x$, имамо

$$\int_{x_0}^{x} N'_t(t,y)dt + \varphi'(y) = N(x,y),$$

одакле је $\varphi'(y) = N(x_0, y)$. Дакле,

$$\varphi(y) = \int_{y_0}^{y} N(x_0, t)dt + C,$$

$$F(x, y) = \int_{x_0}^{x} M(t, y)dt + \int_{y_0}^{y} N(x_0, t)dt + C.$$

**8.** Решити $x(y^2 + 1)dx + (x^2y + 2y^3)dy = 0$.

**Решење.** Како је $M'_y = N'_x$, то је у питању ДЈ са тоталним диференцијалом. Узећемо $(x_0, y_0) = (0, 0)$, па је $\int_0^{x_0} t(y^2 + 1)dt + \int_0^{y} 2t^3dt = C$, односно $x^2(y^2 + 1) + y^4 = C_1$, $C_1 > 0$.

**9.** Решити диференцијалну једначину $y' \cos y + x \sin y \cos^2 y - \sin^3 y = 0$.

**Решење.** $\frac{1}{\sin^2 y} = 1 + Ce^{x^2} - 2e^{x^2} \int e^{-x^2}dx$, $y = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

**10.** Решити диференцијалну једначину $y' \tan y + 4x^3 \cos^3 y = 2x$.

**Решење.** $\frac{1}{\cos^3 y} = Ce^{-3x^2} + 2x^2 - \frac{2}{3}$.

**11.** Решити диференцијалну једначину $2x(1 + \sqrt{x^2 - y})dx - \sqrt{x^2 - y}dy = 0$.

**Решење.** $x^2 + \frac{2}{3}(x^2 - y)^{\frac{3}{2}} = C$.

### 1.2.4 Интеграциони фактор

Функцију $\mu = \mu(t, x)$ дефинисану, непрекидну и различиту од $0$ у једноструко повезаној области $D$ називамо интеграционим фактором једначине $Pdt + Qdx$ ако је $\mu Pdt + \mu Qdx$ једначина са тоталним диференцијалом.
Ако се интеграциони фактор може изразити помоћу функције $\mu = \mu(\omega)$, тада из $(\mu P)'_x = (\mu Q)'_t$ добијамо $\frac{d\mu}{\mu} = \frac{P'_x - Q'_t}{\omega'_t Q - \omega'_x P} d\omega$.

**12.** Одредити интеграциони фактор:
1. диференцијалне једначине која раздваја променљиве,
2. линеарне диференцијалне једначине.

**Решење.** Диференцијална једначина $y' = f(x)g(y)$ има интеграциони фактор $\mu = \frac{1}{g(y)}$ јер помножена са њим постаје диференцијална једначина са тоталним диференцијалом. Из $\frac{1}{\mu} = 0$ се добијају евентуална сингуларна решења. Линеарна диференцијална једначина има интеграциони фактор $e^{\int p(x)dx}$.

**13.** Решити диференцијалну једначину $x(1+xy^2)y' = y(2-3xy^2)$ и одредити решење које пролази кроз $(-2, 0)$.

**Решење.**

$$y(2x-3xy^2)dx - x(1+xy^2)dy = 0,$$

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{3-7xy^2}{-x(1+xy^2)\frac{\partial\omega}{\partial x} - y(2-3xy^2)\frac{\partial\omega}{\partial y}},$$

$$\omega = \alpha \ln|x| + \beta \ln|y|,$$

$$\frac{x^2 - x^3y^2}{y} = C,$$

$$y = 0, x < 0.$$

**14.** Решити диференцијалну једначину $2xy \ln y dx + (x^2 + y^2\sqrt{y^2+1})dy = 0$.

**Решење.** $x^2 \ln y + \frac{1}{3}(y^2+1)^{\frac{3}{2}} = C$.

**15.** Решити диференцијалну једначину $(\sqrt{x^2-y} + 2x)dx - dy = 0$ ако је познато да има $\mu = \mu(x^2 - y)$.

**Решење.** $x + 2\sqrt{x^2-y} = C$.

**16.** Решити диференцијалну једначину

$$(x^2 + y^2 + 1)dx - 2xydy = 0.$$

**Решење.**

**17.** Решити диференцијалну једначину

$$(3xy^3 - 4xy + y)y' + y^2(y^2 - 2) = 0.$$

**Решење.**

## 1.3 Диференцијалне једначине које се решавају без и са параметризацијом

**18.** Решити диференцијалну једначину $y'^2 - (y + x^2)y' + x^2y = 0$.

**Решење.** Опште решење $(y - \frac{x^3}{3} - C)(y - De^x) = 0$, $(x_0, x_0^2)$ сингуларне тачке.

**19.** Решити диференцијалну једначину $(y')^3 - 4yy' = 0$.

**Решење.**

**20.** Решити диференцијалну једначину $xy'^2 - 2y' + 4x = 0$.

**Решење.** Опште решење $(\frac{y}{x^2} - \frac{\sqrt{\frac{y}{x^2}-4}}{x} - C)(D - x(\frac{y}{x} + \sqrt{\frac{y^2}{x^2} - 4})) = 0$.

**21.** Решити диференцијалну једначину $y - y'^2e^{y'} = 0$.

**Решење.** $x = e^u(u+1) + C$, $y = u^2e^u$ је опште решење у параметарском облику.

**22.** Решити диференцијалну једначину $y\ln y' + y' - y\ln y - xy = 0$, $y > 0$, $y' > 0$.

**Решење.** $x = \ln u + \frac{u}{y} - \ln y$, $\ln|y| + C = \frac{u}{y} + \frac{u^2}{2y^2}$.

**23.** Решити диференцијалну једначину $y - yy'^2 - 2y'x = 0$.

**Решење.** $x = C\frac{v^2-1}{v^2}$, $y = -\frac{2C}{v}$.

**24.** Погодном сменом упростити диференцијалну једначину и решити је $y^2y'^2 - 2xyy' + 2y^2 - x^2 + a = 0$.

**Решење.** $y^2 = -(x-c)^2 + \frac{c^2-a}{2}$.

**25.** Решити диференцијалну једначину $x^{n-1}y'^n - nxy' + y = 0$, $n \neq 0$, $x > 0$.

**Решење.**