Зимски семестар 2023/2024 Вежбе из Математике 3
Зора Голубовић z.golubovic@yahoo.com

1 Математика 3

1.1 Бројни редови

1. Нека за $a_n \geqslant 0$, $n \in \mathbb{N}$ и $p > 0$ важи

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{p}{n} + o(\frac{1}{n}), n \to \infty.$$

Доказати да тада a_n монотоно тежи нули и ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ конвергира.

Решење. Како је $\lim\limits_{n\to\infty} n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) = p$, то из дефиниције лимеса следи

$$\frac{p-\varepsilon}{n} + 1 \leqslant \frac{a_n}{a_{n+1}} \leqslant \frac{p+\varepsilon}{n} + 1, \text{за свако } \varepsilon > 0 \text{и све } n \geqslant n_0.$$

Множењем одговарајућих неједнакости за индексе $n_0, n_0+1, \dots n$, добија се

$$\frac{a_{n_0}}{a_{n+1}} \geqslant 1 + (p-\varepsilon)(\frac{1}{n_0} + \frac{1}{n_0+1} + \cdots + \frac{1}{n}).$$

Како је одатле

$$a_{n+1} \leqslant \frac{a_{n_0}}{1 + (p-\varepsilon)(\frac{1}{n_0} + \frac{1}{n_0+1} + \cdots + \frac{1}{n})},$$

а хармонијски ред дивергира, то следи

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = 0,$$

па конвергенција полазног реда следи по Лајбницовом критеријуму.

2. Испитати конвергенцију реда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n}$.

Решење. Како је

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{n+1}{\alpha - n},$$

то су a_n и a_{n+1} супритног знака за $n \geqslant \alpha$. Имамо

$$|\frac{a_n}{a_{n+1}}| = 1 + \frac{\alpha+1}{n}(1 - \frac{\alpha}{n}) = 1 + \frac{\alpha+1}{n} + o(\frac{1}{n}), n \to \infty.$$

За $\alpha > -1$ ред конвергира по Лајбницу, а иначе дивергира јер не задовољава неопходан услов конвергенције.

3. Испитати конвергенцију реда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\binom{\alpha}{n}$.

Решење. Ред је сталног знака, па је апсолутна конвергенција еквивалентна обичној. Како је

$$|\frac{a_n}{a_{n+1}}| = 1 + \frac{\alpha+1}{n} + o(\frac{1}{n^2}), n \to \infty.$$

По Гаусу, ред конвергира за $\alpha > 0$, а иначе дивергира.

1.2 Степени редови

Степени ред

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

се унутар своје области конвергенције (скупа свих x за које $f(x)$ конвергира) може диференцирати и интегралити члан по члан, при чему се радијус конвергенције

$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}},$$

односно

$$R = \lim_{n\to\infty} |\frac{a_n}{a_{n+1}}|$$

не мења.

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, x \in \mathbb{R},$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, x \in \mathbb{R},$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}, x \in \mathbb{R},$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}, x \in (-1, 1],$$

$$(1+x)^{\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n, \text{за } \begin{cases} x \in [-1,1], \alpha > 0, \\ x \in (-1,1], \alpha \in (-1,0], \\ x \in (-1,1), \alpha \leqslant -1. \end{cases}$$

4. Одредити полупречнике конвергенције редова $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(1+i)^n z^n}{n2^n}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 5^n z^{3n}$.

Решење. Полупречници конвергенције посматраних степених редова су редом $R = 1$, $R = \sqrt{2}$, $R = \frac{1}{\sqrt[3]{5}}$.

5. Одредити области конвергенције редова $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{3n^2+1}(x-1)^n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+(-2)^n}{n}(x+1)^n$.

Решење. Полупречници конвергенције посматраних степених редова су редом $R = 1$, $R = \frac{1}{3}$. Треба још испитати конвергенцију у крајњим тачкама.
Први ред конвергира за $x = 0$ по Лајбницу, а дивергира за $x = 2$, па је његова област конвергенције $[0, 2)$.
Други ред конвергира за $x = -\frac{4}{3}$ као сума два конвергентна реда, а за $x = -\frac{2}{3}$ дивергира као сума дивергентног и конвергентног реда, па је његова област конвергенције $\left[-\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}\right)$.

6. Развити $\sin^3 x$ у степени ред.

Решење. Искористити идентитет $\sin^3 x = \frac{3\sin x - \sin 3x}{4}$ и развој $\sin x$ у степени ред.

7. Развити $\sinh x$ и $\cosh x$ у степени ред.

Решење. Искористити $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, као и $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ и развој e^x у степени ред.

8. Доказати да је $\frac{1}{(1-x)^2} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$, $|x| < 1$.

Решење. Користеци представљање функције $\frac{1}{1-x}$ преко степеног реда и диференцирањем члан по члан у области конвергенције, следи тражено.

9. Развити $f(x) = \frac{x}{(1-x)(1-x^2)}$ у степени ред.

Решење. Како је $f(x) = -\frac{1}{4(1+x)} - \frac{1}{4(1-x)} + \frac{1}{2(1-x)^2}$, то је $f(x) = \frac{1}{4}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(2n+1+(-1)^n)x^n$.

10. Функцију $\arctan x$ развити у степени ред, па користећи добијени развој наћи суму бројног реда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n(2n+1)}$.

Решење. Како се степени ред може интегралити у области конвергенције, а важи

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \int_0^x t^{2n}dt,$$

то следи $\arctan x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$, што важи за $x \in [-1,1]$. Специјално, за $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ добија се сума бројног реда.

11. Наћи суме редова $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$.

Решење. Степени ред се може диференцирати члан по члан у области конвергенције:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x}$$

Интеграцијом последење једнакости се добија

$$\int_0^x f'(t)dt = f(x) - f(0) = \int_0^x \frac{dt}{1-t} = -\ln(1-x),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x).$$

Како је $g'(x) = -\ln(1-x)$, применом парцијалне интеграције на

$$\int_0^x g'(t)dt = g(x) - g(0) = -\int_0^x \ln(1-t)dt,$$

добија се да је сума другог реда једнака $x + (1-x)\ln(1-x)$.

12. Израчунати интеграл $\int\limits_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}dx$.

Решење. Развијањем функције $\ln(1+x)$ у степени ред и интеграљењем члан по члан у области конвергенције, добија се вредност интеграла.

13. Нека је x реалан број. Дефинишимо низ $(x_n)_{n\geqslant 1}$ рекурзивно са

$$\begin{aligned} x_1 &= 1, \\ x_{n+1} &= x^n + nx_n, \text{за } n \geqslant 1. \end{aligned}$$

Доказати да је

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{x^n}{x_{n+1}}\right) = e^{-x}.$$

Решење. Одредимо n-ту парцијални производ користећи рекурентну формулу

$$P_n = \prod_{k=1}^{n}(1-\frac{x^k}{x_{k+1}}) = \prod_{k=1}^{n}\frac{x_{k+1}-x^k}{x_{k+1}} = \prod_{k=1}^{n}\frac{kx_k}{x_{k+1}} = \frac{n!}{x_{n+1}}.$$

Како је

$$\frac{1}{P_{n+1}} - \frac{1}{P_n} = \frac{x_{n+2}}{(n+1)!} - \frac{x_{n+1}}{n!} = \frac{x_{n+2}-(n+1)x_{n+1}}{(n+1)!} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}, \text{ за } n \geqslant 1,$$

имамо

$$\frac{1}{P_n} = \frac{1}{P_1} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = \sum_{k=0}^{n+1}\frac{x^k}{k!},$$

при чему последњи израз конвергира ка e^x кад $n \to \infty$. Дакле,

$$\lim_{n\to\infty} P_n = e^{-x}.$$

Нека ред $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ конвергира. Тада се његова сума може наћи по формули

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{x\to 1-0}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

14. Наћи суму реда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2^n(n+1)}{n!}$.

Решење. Сума реда $x\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(2x)^n}{n!}$ је xe^{2x}. Диференцирањем члан по члан (што је дозвољено у области конвергенције) и пуштањем лимеса кад $x \to 1-0$, добија се $S = 3e^2$.

15. Наћи суму реда $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+n-2}$.

Решење. Посматрајмо степени ред $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n^2+n-2}$. Област конвергенције овог реда је $[-1,1]$, што се лако провери. Након краћег рачуна, добија се

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n^2+n-2} = \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-x)^n}{n-1} - \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-x)^n}{n+2} = x\ln(1+x) + \frac{\ln(1+x)}{3x^2} - \frac{1}{3x} + \frac{1}{6} - \frac{x}{9}.$$

Узимајући $x=1$, следи $S = \frac{2}{3}\ln 2 - \frac{5}{18}$.

1.3 Примена степених редова у теорији диференцијалних једначина

Функција је аналитичка у некој тачки ако се може представити у облику конвергентног степеног реда у околини те тачке.
Нека је $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ аналитичка функција у некој околини тачке (x_0, y_0, y_0'). Тада постоји јединствено решење Кошијевог задатка $y'' = f(x, y, y')$, $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_0'$, дефинисано у некој околини тачке x_0 и оно је аналитичка функција у тој околини.
Посматрајмо диференцијалну једначину $y''(x) + p_1(x)y + p_2(x)y = 0$. Тачка x_0 је регуларна тачка диференцијалне једначине ако су функције $p_1(x)$ и $p_2(x)$ аналитичке у тој тачки. Тачка x_0 је сингуларна тачка диференцијалне једначине ако бар једна од функција $p_1(x)$ и $p_2(x)$ није аналитичка у тачки x_0.
Ако су функције $p_1(x)$ и $p_2(x)$ аналитичке функције у области $|x - x_0| < R$, тада је свако решење диференцијалне једначине јединствена аналитицка функција у овој области.

16. Доказати да је функција $y = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n}}{(4n)!}$ решење диференцијалне једначине $y^{(4)} - y = 0$.

Решење. Тривијално се провери диференцирањем степеног реда члан по члан.

17. Методом неодређених коефицијената одредити у облику степеног реда решење Кошијевог задатка $y' = x^2 + e^y$, $y(0) = 0$.

Решење. Означимо решење $y(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k x^k$. Диференцирањем члан по члан се добија $y'(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1}$, па сменом у диференцијалну једначину имамо

$$0 \equiv y'(x) - x^2 - e^{y(x)} = \sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1} - x^2 - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j!} (\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k).$$

Изједначавањем коефицијената уз x^k, добија се

$$0 \equiv a_1 - 1 + (2a_2 - a_1)x + (3a_3 - 1 - a_2 - \frac{a_1^2}{2})x^2 + \dots$$

одакле је

$$y(x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{2}{3}x^3 + \dots.$$

18. Наћи оно решење диференцијалне једначине $y'' - xy = 0$ које се може приказати у облику степпеног реда по степенима x и које задовољава почетне услове $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

Решење. Означимо решење са $y(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$. Како је $y(0) = 1$, то је $a_0 = 1$. Диференцирањем члан по члан се добија

$$y'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1},$$

$$y''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k x^k$$

па сменом у диференцијалну једначину имамо

$$0 \equiv y''(x) - xy(x) = a_2 + (3 \cdot 2a_3 - 1)x + \sum_{k=2}^{\infty} ((k+2)(k+1)a_{k+2} - a_{k-1})x^k.$$

Изједначавањем коефицијенат уз x^k, добија се

$$y(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n}}{(2 \cdot 3)(5 \cdot 6) \cdots ((3n-1) \cdot 3n)}.$$

19. Решити диференцијалну једначину $y'' - x^2 y = 0$.

Решење. Означимо решење са $y(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$. Диеференцирањем степеног реда члан по члан се добија

$$y'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1},$$

$$y''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k x^k$$

па сменом у диференцијалну једначину имамо

$$0 \equiv y''(x) - x^2 y(x) = 2a_2 + (3 \cdot 2a_3)x + \sum_{k=2}^{\infty} ((k+2)(k+1)a_{k+2} - a_{k-2})x^k.$$

Изједначавањем коефицијената уз x^k, добија се

$$y(x) = a_0 + a_1 x + a_0 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{4k}}{4 \cdot 3 \cdot 8 \cdot 7 \cdots 4k(4k-1)} + a_1 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{4k+1}}{5 \cdot 4 \cdot 9 \cdot 8 \cdots (4k+1)4k},$$

где су $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$.

20. Методом степених редова одредити Кошијево решење у коначном облику једначине $y'' - xy' - 2y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

Решење. Означимо решење са $y(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$. Диференцирањем степеног реда члан по члан се добија

$$y'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1},$$

$$y''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k x^k$$

па сменом у диференцијалну једначину имамо

$$0 \equiv y''(x) - xy'(x) - 2y(x) = (2a_2 - 2a_0) + \sum_{k=1}^{\infty} ((k+2)((k+1)a_{k+2} - a_k)x^k.$$

Изједначавањем коефицијената уз x^k, добија се

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k k!} x^{2k+1} = xe^{\frac{x^2}{2}}.$$

21. У области $|x| < 1$ одредити опште решење диференцијалне једначине

$$(1 - x^2)y'' - 6xy' - 4y = 0.$$

Решење. Означимо решење са $y(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$. Диференци

$$y'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1},$$

$$y''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k x^k$$

па сменом у диференцијалну једначину имамо

$$0 \equiv (1-x^2)y''(x) - 6xy'(x) - 4y(x) = (a_2 - 4a_0) + (6a_3 - 10a_1) + \sum_{k=2}^{\infty} ((k+2)(k+1)a_{k+2} - (k+1)(k+4)a_k)x^k.$$

Изједначавањем коефицијената уз x^k, добија се

$$y(x) = a_0 \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)x^{2k} + \frac{a_1}{3} \sum_{k=0}^{\infty} (2k+3)x^{2k+1}.$$

22. Представити степеним редом опште решење нехомогене диференцијалне једначине

$$y'' + x^2 y = 1 + x + x^2.$$

Решење. Означимо решење са $y(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$. Диференцирањем члан по члан се добија

$$y'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1},$$

$$y''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k x^k$$

па сменом у диференцијалну једначину имамо

$$0 \equiv y''(x) + x^2 y(x) - 1 - x - x^2.$$

Изједначавањем коефицијената уз x^k, добија се

$$y(x) = a_0 + a_1 x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1 - a_0}{12}x^4 - \frac{a_1}{20}x^5 - \frac{1}{60}x^+ \dots,$$

$a_0, a_1 \in \mathbb{R}$.

Сингуларну тачку x_0 зовемо регуларно-сингуларно тачком ако су функције $(x - x_0)p_1(x)$ и $(x - x_0)^2 p_2(x)$ аналитичке у тој тачки.

23. Испитати регуларност тачке $x = 0$ за $2x^2 y'' + 7x(x+1)y' - 3y = 0$.

Решење. $x = 0$ је регуларно-сингуларна тачка.