Зимски семестар 2023/2024 Вежбе из Математике 3
Зора Голубовић z.golubovic@yahoo.com

1 Математика 3

1.1 Степени редови

1. Развити функцију $f(x) = \arcsin x$ у степени ред.

Решење. Како је $f'(x) = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n}(-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n}$ (при чему је $R=1$), то интеграљењем степеног реда у области конвергенције добијамо развој посматране функције у степени ред $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!x^{2n+1}}{(2n)!!(2n+1)}$, при чему се радијус конвергенције није променио интеграцијом. Додатно се испита, да за $x = \pm 1$ ред такође конвергира, па развој важи на $[-1,1]$.

1.2 Функционални редови

2. Испитати равномерну конвергенцију следећих низова на указаним скуповима

$$f_n(x) = \frac{n^2}{n^2+x^2} \text{на [-1,1]}$$

$$f_n(x) = \frac{\arctan nx}{\sqrt{n+x}} \text{на} [0,\infty).$$

Решење. Гранична функција за први низ је $f(x)=1$, а како је

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[-1,1]} |f_n(x)-f(x)| = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[-1,1]} |\frac{n^2}{n^2+x^2} - 1|,$$

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[-1,1]} |f_n(x)-f(x)| = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[-1,1]} |\frac{x^2}{x^2+n^2}|,$$

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[-1,1]} |f_n(x)-f(x)| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+n^2} = 0,$$

задати низ је равномерно конвергентан на $[-1,1]$. Грнична функција за други низ је 0, а како је $0 \leqslant \frac{\arctan nx}{\sqrt{n+x}} < \frac{\pi}{2\sqrt{n}} \to 0, n \to \infty$, то је и овај низа равномерно конвергентан за $x > 0$.

3. Доказати да је низ $f_n(x) = nx(1-x)^n$, $n \in \mathbb{N}$ конвергентан, али не равномерно на сегменту $[0,1]$, а да је $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^1 f_n(x)dx = \int\limits_0^1 \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)dx$.

Решење.

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in[0,1]} nx(1-x)^n = \lim_{n\to\infty}(\frac{n}{n+1})^{n+1} = e^{-1} \neq 0.$$

4. Доказати да је низ функција

$$f_n(x) = \frac{nx + x^2 + n^2}{x^2 + n^2}$$

равномерно конвергентан ка $f(x) = 1$ на сегменту $[0,1]$. Да ли је низ равномерно конвергентан функцији f на целој реалној правој?

Решење. Низ је равномерно конвергентан посматраној функцији на сегменту $[0,1]$:

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in[0,1]}|f_n(x) - f(x)| = \lim_{n\to\infty}\sup_{x\in[0,1]}|\frac{nx + x^2 + n^2}{n^2 + x^2} - 1|,$$

а како је

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in\mathbb{R}}|f_n(x) - f(x)| = \lim_{n\to\infty}\sup_{x\in\mathbb{R}}|\frac{nx}{x^2+n^2}| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \neq 0,$$

низ је неравномерно конвергентан истој функцији на реалној правој.

5. Испитати равномерну конвергенцију функционалног низа $f_n(x) = e^{n\frac{1-x}{x}}$ на скуповима $E_1 = (1,\infty)$, $E_2 = (\delta,\infty), \delta > 1$.

Решење. Како је $\sup_{x\in E_1}|f_n(x)| = f_n(1) = 1 \neq 0$, то је низ неравномерно конвергентан нули на првом скупу, а како $\sup_{x\in E_2}|f_n(x)| = f_n(\delta) \to 0$, кад $n \to \infty$, то је равномерно конвергентан на другом скупу.

6. Одредити област конвергенције функционалног реда

$$\sum_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{n})^n 2^{nx}.$$

Решење. Применимо Кошијев критеријум. Како је

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})2^x = 2^x,$$

добијамо да је ред конвергентан за свако $x < 0$, а дивергентан за свако $x > 0$. Испитајмо посебно конвергенцију реда у случају $x = 0$. Тада је ред облика $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{n})^n$, па дивергира јер није задовољен неопходан услов конвергенције ($\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e \neq 0$).

7. Испитати апсолутну и условну конвергенију реда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n + y^n}.$$

Решење. Претпоставимо најпре да је $0 \leqslant y \leqslant 1$. Тада је (на основу Кошијевог критеријума) ред конвергентан за свако $|x| < 1$, што следи из

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{|x|^n}{n + y^n}} = |x| < 1.$$

Нека је $0 \leqslant y \leqslant 1$ и $x \geqslant 1$. Тада је

$$\frac{x^n}{n + y^n} \geqslant \frac{x^n}{n+1} \geqslant \frac{1}{n+1},$$

па ред дивергира на основу првог поредбеног критеријума (поређењем са дивергентним хармонијским редом). Ако је $0 \leqslant y \leqslant 1$ и $x = -1$, добија се ред који условно конвергира по Лајбницу (а апсолутно дивергира). Испитајмо сада ред за $y > 1$. Напишимо ред у облику

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{x}{y})^n \frac{1}{1 + ny^{-n}}.$$

Ако је $|x| < y$, ред је конвергентан на основу Кошијевог критеријума, јер је

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{(\frac{x}{y})^n \frac{1}{1 + ny^{-n}}} = \frac{|x|}{y} < 1.$$

Ако је $x = \pm y$, тада је

$$\lim_{n\to\infty} \frac{y^n}{1 + y^n} = 1,$$

па ред дивергира јер општи члан не тежи нули. На основу свега претходног, може се закључити следеће: ред је апсолутно конвергентан ако је ($0 \leqslant y \leqslant 1$ и $|x| < 1$) или ($|x| < y$ и $y > 1$.) Ако је $x = -1$ и $0 \leqslant y \leqslant 1$, ред је условно конвергентан.

8. Испитати равномерну конвергенцију функционалног реда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{(1 + (n-1)x)(1 + nx)}$$

на скупу

- $(0, \infty)$
- (δ, ∞), $\delta > 0$.

Решење. Лако се проверава да је парцијална сума реда $S_n(x) = 1 - \frac{1}{1+nx}$, а сума задатог реда $S(x) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = 1$. Како је

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in(0,\infty)} |S_n(x) - S(x)| = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in(0,\infty)} |\frac{1}{1+nx}| = 1,$$

ред је неравномерно конвергентан суми $S(x)$ на скупу $(0,\infty)$. Како важи неједнакост $nx > n\delta$ и

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in(\delta,\infty)} |S_n(x) - S(x)| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+n\delta} = 0,$$

то је ред рвномерно конвергентан сум $S(x)$ на скупу (δ,∞).

9. Испитати конвергенцију и равномерну конвергенцију реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ на скупу E, где је

$$f_n(x) = e^{-n^2x^2}\sin nx,\ \ E = \mathbb{R},$$

$$f_n(x) = \arctan\frac{x^3}{n\sqrt{n}},\ \ E = [0,\infty)$$

.

Решење. Испитајмо први ред. Приметимо најпре да је $f_n(0) = 0$. Ако је $x \neq 0$, тада је

$$|f_n(x)| \leqslant e^{-n^2x^2} \leqslant \frac{1}{n^2x^2}.$$

Дакле, ред је конвергентан на реалној правој. Међутим, ред не конвергира равномерно на $\mathbb{R}$, што се види на примеру $x = x_n = \frac{1}{n}$, јер је тада $f_n(x_n) = e^{-1}\sin 1$ за свако $n \in \mathbb{N}$. Други ред је конвергентан на скупу E ка граничној функцији $f(x) = 0$, што је последица неједнакости $\arctan x \leqslant x$, $x \geqslant 0$. Узимајући $x_n = \sqrt{n}$, $n \in \mathbb{N}$ имамо да је $f_n(x_n) = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$, одакле на основу Кошијеве теореме закључујемо да општи члан није равномерно конвергентан, па ни сам ред.

Теорема (Вајерштрасов критеријум)**.** Ако постоји низ ненегативних реалних бројева $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$, такав да

1. постоји $n_0 \in \mathbb{N}$ такво да за све $n > n_0$ и свако $x \in A$ важи $|a_n(x)| \leqslant c_n$,
2. ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ конвергира,

тада ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ равномерно конвергира на A.

10. Доказати да је сума реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$ непрекидна функција за свако $x \in \mathbb{R}$.

Решење. Вајерштрасовим критеријумом (поређењем са конвергентним бројним редом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$) се показује да ред равномерно конвергира, па је и сума реда непрекидна функција за свако $x \in \mathbb{R}$.

11. Одредити област дефинисаности и испитати непрекидност функције

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (x^2 + \frac{1}{n})^n.$$

Решење. Област дефинисаности одредићемо помоћу Кошијевог критеријума. Како је

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{(x^2 + \frac{1}{n})^n} = x^2,$$

ред ће конвергирати за $x^2 < 1$, а дивергирати за $x^2 > 1$. За $x = \pm 1$ ред је дивергентан јер није задовољен неопходан услов конвергенције. Дакле, област дефинисаности је $(-1, 1)$. Да бисмо испитали непрекидност функције, неопходно је одредити област равномерне конвергенције реда. Докажимо да је ред равномерно конвергентан на сваком сегменту $[-a, a]$, $a \in (0, 1)$. Нека је b произвољан број такав да $0 < a < b < 1$. Постоји $n_0 \in \mathbb{N}$ тако да за све $n \geqslant n_0$ важи $a + \frac{1}{\sqrt{n}} < b$. Тада за све $n \geqslant n_0$ и свако $|x| \leqslant a$, важи

$$(x^2 + \frac{1}{n}) \leqslant (|x| + \frac{1}{\sqrt{n}})^{2n} \leqslant b^{2n}.$$

Како је ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b^{2n}$ конвергентан јер $b^2 < 1$, то је по Вајерштрасовом критеријуму ред којим је дефинисана функција $f(x)$ равномерно конвергентан. Стога је $f(x)$ непрекидна на $[-a, a]$, а због произвољности броја a, то је функција $f(x)$ непрекидна на интервалу $(-1, 1)$.

12. Користећи Вајерштрасов критеријум, доказати да је

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan{(n^2 x)} \cos{(n\pi x)}}{n\sqrt{n}}$$

равномерно конвергентан на $\mathbb{R}$ и да је

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln{(1 + \frac{x}{n \ln^2{(n+1)}})}$$

равномерно конвергентан на $[0, 2]$.

Решење. Да је први ред равномерно конвергентан на реалној правој добија се поређењем са конвергентним редом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ уз кори71ење чињенице да су $\arctan$ и $\cos$ ограничене функције. За други ред, добија се да је ред равномерно конвергентан за $x \in [0, 2]$ на основу неједнакости $\ln(1 + t) \leqslant t$ за $t \geqslant 0$ и због конвергенције реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}$ (по Кошијевом интегралном критеријуму).

13. Испитати равномерну конвергенцију функционалног реда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n^2x}{x+n^3} \ln(1+\frac{x^2}{n})$$

на скуповима

$$E_1 = (0,1),$$
$$E_2 = (1,\infty).$$

Решење. Равномерно конвергира на E_1 по Вајерштасовом критеријуму (поређењем са конвергентним редом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1+n^2}{n^3}\frac{1}{n}$) и неравномерно на E_2, што се види за $x_n = n$, $n \in \mathbb{N}$ јер тада није задовољена Кошијева теорема.

14. Испитати равномерну конвергенцију функционалног реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-x^2n^6} \sin(n^3x)$ на скуповима $(0,\infty)$,(δ,∞), $\delta > 0$.

Решење. Како је $f_n(\frac{1}{n^3}) = \frac{\sin 1}{e} > 0$, ред не конвергира равномерно на скупу E_1. Због $|f_n(x)| < \frac{1}{\delta^2 n^6}$, ред равномерно конвергира на другом скупу по Вајерштрасовом критеријуму.

15. Дат је ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(3n+2)^\alpha}{n(n+1)(n+2)} x^n$.

1. Испитати условну, апсолутну и равномерну конвергенцију реда.
2. За $x = 1$, $\alpha = 1$ сумирати ред.

Решење. Полупречник конвергенције задатог степеног реда је

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = 1,$$

па је ред апсолутно конвергентан на $(-1,1)$. Испитајмо понашање реда на крајевима интервала конвергенције. Ако је $x = 1$, применом Рабеовог критеријума се добија да ред конвергира за $\alpha < 2$, док дивергира за $\alpha > 2$:

$$\lim_{n\to\infty} n(\frac{b_n}{b_{n+1}} - 1) = 3 - \alpha.$$

За $\alpha = 2$, ред је дивергентан јер се понаша као хармонијски ред. Ако је $x = -1$, тад имамо ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n$. Низ b_n тежи нули за $\alpha < 3$ и тад је монотоно опадајући, па конвергира по Лајбницовом критеријуму. Дакле, за $\alpha < 2$ ред је апсолутно и равномерно конвергентан на $[-1,1]$, док је за $x = -1$ и $2 \leqslant \alpha < 3$ ред условно конвергентан.

2. $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} + 2\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{3}{4}$. Тражена сума је 2.

Теорема (Дирихлеов критеријум)**.** Нека

1. функционални ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ има равномерно ограничене парцијалне суме, тј. постоји константа K, таква да је за све $n \in \mathbb{N}$ и свако $x \in A$ испуњено $|\sum\limits_{k=1}^{n} b_k(x)| \leqslant K$,

2. $(a_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ је, за свако $x \in A$, монотон низ (по n) који равномерно конвергира нули.

Тада ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ равномерно конвергира на A.

16. Испитати равномерну конвергенцију функционалног реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin x \sin nx}{\sqrt{n+x^2}}$ на $\mathbb{R}$.

Решење. Дирихлеовим критеријумом се показује да ред равномерно конвергира. Низ $\frac{1}{\sqrt{n+x^2}}$ равномерно конвергира ка 0 на реалној правој и

$$|\sum_{k=1}^{n} \sin x \sin kx| = |\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \sin x(\cos\frac{(k+1)x}{2} - \cos\frac{(k-1)x}{2})}{2sin\frac{x}{2}}| = |\cos\frac{x}{2}||\cos\frac{(n+1)x}{2} - 1| \leqslant 2.$$

Теорема (Абелов критеријум)**.** Нека:

1. Функционални ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ је равномерно конвергентан на $A \subset \mathbb{R}$,

2. $(a_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ је, за свако $x \in A$, монотон низ (по n) који је равномерно ограничен, тј. за неко $K \in \mathbb{R}$ важи $|a_n(x)| \leqslant K$ за све $x \in A$, $n \in \mathbb{N}$.

Тада ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ равномерно конвергира на A.

17. Испитати равномерну конвергенцију функционалног реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n+\sqrt{x}}}(1+\frac{x}{n})^n$ на $[0, 1]$.

Решење. Абеловим критеријумом се показује да ред равномерно конвергира. Низ $(1+\frac{x}{n})^n$ је монотон за свако фиксирано $x \in [0, 1]$. Како је

$$(1+\frac{x}{n})^n \leqslant (1+\frac{1}{n})^n < e,$$

за свако $x \in [0, 1]$, низ је равномерно ограничен на $[0, 1]$. Осим тога, ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n+\sqrt{x}}}$ је равномерно конвергентан на $[0, 1]$ према Дирихлеовом критеријуму, јер је низ $\frac{1}{\sqrt[3]{n+\sqrt{x}}}$ опадајући и равномерно конвергентан на скупу $[0, 1]$, а парцијалне суме реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ су равномерно ограничене на скупу E.

18. Наћи $\lim\limits_{x\to 1-0}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\frac{x^n}{1+x^n}$.

Решење. Задати ред је равномерно конвергентан за свако $x \geqslant 0$ по Абеловом критеријуму. Ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ је равномерно конвергентан по Лајбницу , а низ $\frac{x^n}{1+x^n}$ је монотоно растући и ограничен одозго са 1 за свако $x \geqslant 1$. Притом, постоји гранична вредност $\lim\limits_{x\to 1-0}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\frac{x^n}{1+x^n} = \frac{(-1)^{n+1}}{2n}$, па лимес и сума могу заменити места

$$\lim_{x\to 1-0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\frac{x^n}{1+x^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\lim_{x\to 1-0}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\frac{x^n}{1+x^n} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

Резултат: $\frac{\ln 2}{2}$.

Теорема. Ако ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ функција интеграбилних на сегменту $[a,b]$ равномерно конвергира, онда је његов збир интеграбилна функција и важи

$$\int_a^b \Big(\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)\Big)dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b a_n(x)dx.$$

Теорема. Ако је свака од функција $a_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ диференцијабилна и ако ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n'(x)$ равномерно конвергира на $[a,b]$, а сам ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ конвергира у бар једној тачки $x_0 \in [a,b]$, тада тај ред равномерно конвергира на $[a,b]$, његова сума је диференцијабилна функција и важи $(\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x))' = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n'(x)$ за $x \in [a,b]$.