Зимски семестар 2023/2024 Вежбе из Математике 3
Зора Голубовић z.golubovic@yahoo.com

1 Математика 3

1.1 Бројни редови

1. Нека је низ x_n задат са

$$4x_{n+2} = 4x_{n+1} - x_n,$$
$$x_1 = x_2 = \frac{1}{2}.$$

Испитати конвергенцију реда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{n}$$

и сумирати га ако конвергира.

Решење. Опште решење диференцне једначине је $x_n = C_1(\frac{1}{2})^n + C_2 n(\frac{1}{2})^n$, при чему се константе C_1, C_2 одређују из почетних услова. Међутим, већ одавде је јасно да је $\frac{x_n}{n} \in O(\frac{1}{2^n})$ кад $n \to \infty$, па закључујемо на основу поредбеног критеријума да посматрани ред конвергира. Додатним израчунавањем налазимо $C_1 = 0$, $C_2 = 1$, па је $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$.

2. Сумирати ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nq^n$, за $|q| < 1$.

Решење. Израчунајмо најпре n-ту парцијалну суму реда. Множењем $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} kq^k$ са q и одузимањем qS_n од S_n, поништавају се одређени чланови у суми и као резултат имамо $S_n = (\sum\limits_{k=1}^{n} q^k) - nq^{n+1} = \frac{q(1-q^n)}{(1-q)^2} - \frac{nq^{n+1}}{1-q}$. Сума реда је лимес низа парцијалних сума: $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{q}{(1-q)^2}$.

3. Сумирати ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} [\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n}]$.

Решење. $\sum_{n=1}^{\infty}[\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n}] = \sum_{n=1}^{\infty}[\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}-(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})] = \sum_{n=1}^{\infty}(x_{n+1}-x_n)$. Сума реда је лимес низа парцијалних телескопских сума и једнака је: $S = \lim_{n\to\infty}(x_{n+1}-x_1) = 1-\sqrt{2}$.

4. Сумирати ред $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos\frac{2n\pi}{3}}{2^n}$.

Решење. Посматрајмо суме $S_1 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{2n\pi}{3}}{2^n}$ и $S_2 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{2n\pi}{3}}{2^n}$: $S_1 + iS_2 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{cis(\frac{2n\pi}{3})}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty}(\frac{e^{\frac{2\pi i}{3}}}{2})^n = \frac{e^{\frac{2\pi i}{3}}}{1-\frac{e^{\frac{2\pi i}{3}}}{2}} = \frac{5}{7}+i\frac{\sqrt{3}}{7}$.

5. Наћи вредност бесконачног производа $\prod_{n=2}^{\infty}(1-\frac{1}{n^2})$.

Решење. Како је по дефиницији $\prod_{n=2}^{\infty}(1-\frac{1}{n^2}) = \lim_{n\to\infty}\prod_{k=2}^{n}(1-\frac{1}{k^2})$, то на основу задатка са часа у првој недељи наставе знамо да је тражена вредност заправо $\frac{1}{2}$. Поновимо ипак тај рачун, раније изведен: $\prod_{n=2}^{\infty}(1-\frac{1}{n^2}) = \lim_{k\to\infty}\prod_{n=2}^{k}(1-\frac{1}{n^2}) = \lim_{k\to\infty}\prod_{n=2}^{k}\frac{(n-1)(n+1)}{n^2} = \lim_{k\to\infty}\frac{1\cdot3}{2\cdot2}\cdot\frac{2\cdot4}{3\cdot3}\cdot\frac{3\cdot5}{4\cdot4}\cdot\cdots\cdot\frac{(k-2)\cdot k}{(k-1)\cdot(k-1)}\cdot\frac{(k-1)(k+1)}{k\cdot k} = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{2}(1+\frac{1}{k}) = \frac{1}{2}$.

6. Наћи вредност бесконачног производа $\prod_{n=2}^{\infty}\frac{n^3-1}{n^3+1}$.

Решење. Како је по дефиницији $\prod_{n=2}^{\infty}\frac{n^3+1}{n^3-1} = \lim_{n\to\infty}\prod_{k=2}^{n}\frac{(k+1)(k^2-k+1)}{(k-1)(k^2+k+1)}$, довољно је резултат са часа одржаног прве недеље интерпретирати у терминима бесконачних производа и доћи до закључка да је тражена вредност $\frac{2}{3}$. Рачун се може проверити и следећим начином: $\prod_{n=2}^{\infty}\frac{n^3+1}{n^3-1} = \prod_{n=2}^{\infty}\frac{(n+1)(n+\omega)(n+\omega^2)}{(n-1)(n-\omega)(n-\omega^2)} = \prod_{n=2}^{\infty}\frac{(n+1)(n-1-\omega)(n-1-\omega^2)}{(n-1)(n-\omega)(n-\omega^2)} = \lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)(1-\omega)(1-\omega^2)}{1\cdot2(n-\omega)(n-\omega^2)} = \lim_{n\to\infty}\frac{3(1+\frac{1}{n})}{2(1-\frac{\omega}{n})(1-\frac{\omega^2}{n})} = \frac{3}{2}$.

7. Сумирати ред

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n^4+n^2+1}$$

Решење. Нека је $a_n = \frac{n}{n^4+n^2+1}$. Очигледно, неопходан услов конвергенције реда је задовољен, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Ред конвергира по поредбеном критеријуму, поређењем са конвергентним редом $\sum_{n\to\infty} \frac{1}{n^3}$. Разлагањем полинома n^4+n^2+1 се добија да је $a_n = \frac{1}{2(n^2-n+1)} - \frac{1}{2(n^2+n+1)} = \frac{1}{2}(b_n - b_{n+1})$, за $b_n = \frac{1}{n^2-n+1}$, то је $S = \lim_{n\to\infty} S_N = \lim_{n\to\infty}(b_1 - b_{N+1}) = \frac{1}{2}$.

8. Сумирати ред

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{arctg} \frac{2}{n^2}.$$

Решење. Најпре, ово је ред са позитивним члановима и он је еквиконвергентан са редом $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n^2}$. Ово важи јер је $\operatorname{arctg} \sim x$, $x \to 0$. Уведимо ознаку $a_n = \operatorname{arctg} n$, $n \in \mathbb{N}_0$. Приметимо да важи

$$\operatorname{tg}(a_{n+1}-a_{n-1}) = \frac{\operatorname{tg} a_{n+1} - \operatorname{tg} a_{n-1}}{1 + \operatorname{tg} a_{n+1} \cdot \operatorname{tg} a_{n-1}} = \frac{2}{n^2} \implies \overbrace{\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}(a_{n+1} - a_{n-1})\right)}^{= a_{n+1} - a_{n-1}} = \operatorname{arctg} \frac{2}{n^2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Дакле, имамо да је

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{arctg} \frac{2}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} (a_{n+1} - a_{n-1}).$$

Нека је $m \in \mathbb{N}$ произвољно. Тада је

$$\sum_{n=1}^{m} (a_{n+1}-a_{n-1}) = a_{m+1}+a_{m-1}-a_1-a_0 \implies \lim_{m\to+\infty} \sum_{n=1}^{m} (a_{n+1}-a_{n-1}) = \frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}-0 = \frac{3\pi}{4}.$$

Теорема (Кошијев став)**.** Нека је a_n опадајући низ позитивних чланова. Тада су редови $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ еквиконвергентни.

9. Ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ конвергира за $\alpha > 1$.

Решење. Применом Кошијевог става налазимо да је посматрани ред еквиконвергентан геометријском реду $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^n$ који конвергира за $\alpha > 1$.

10. Испитати конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ако је

- $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$,
- $a_n = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$.

Решење. Како је $a_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \sim \frac{1}{2\sqrt{n}}$, $n \to \infty$, то први ред дивергира ($\frac{1}{2} < 1$), а други ред, чији општи члан је $\sim \frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}$, $n \to \infty$, конвергира јер је $\frac{3}{2} > 1$.

Теорема (Даламберов тест)**.** Нека за чланове позитивног реда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ постоји $l = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$. За $l < 1$ ред конвергра, а за $l > 1$ дивергира.

11. Испитати конвергенцију реда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$.

Решење. Конвергира по Даламберу: $l = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)!^2}{(2(n+1))!}}{\frac{n!^2}{(2n)!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{1}{4}$.

12. Испитати конвергенцију реда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1000^n}{n!}$.

Решење. Конвергира по Даламберу: $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1000^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{1000^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1000}{n+1} = 0 < 1$.

13. Испитати конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$.

Решење. Дивергира по Даламберу: $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{3^n n!}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{3}{e} > 1$.

Теорема (Кошијев тест)**.** Нека за чланове позитивног реда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ постоји $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$. За $l < 1$ ред конвергира, а за $l > 1$ дивергира.

14. Испитати конвергенцију реда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(\frac{n-1}{n+1})^{n(n-1)}$.

Решење. Како је $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty}(\frac{n-1}{n+1})^{(n-1)} = \lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{2}{n+1})^{(\frac{-(n+1)}{2})(\frac{n-1}{-2(n+1)})} = e^{-\frac{1}{2}} < 1$, ред конвергира по Кошију.

15. Испитати конвергенцију реда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n^5}{2^n+3^n}$.

Решење. Конвергира по Кошију: $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n^5}{2^n+3^n}} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{3}\sqrt[n]{\frac{n^5}{1+(\frac{2}{3})^n}} = \frac{1}{3} < 1$.

16. Испитати конвергенцију реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ако је

- $a_n = \frac{e^n+n^5}{3^n+\ln(n^{10}+1)}\sin(\frac{1}{n})$,
- $a_n = \frac{\arctan n}{n^a}$, за $a \geqslant 1$.

Решење. Како је $a_n \sim \frac{1}{n}(\frac{e}{3})^n$, $n\to\infty$, то први ред конвергира, а други ред, чији општи члан је заправо једнак $\frac{\frac{\pi}{2}-\mathrm{arctg}(\frac{1}{n})}{n^2}$, конвергира за $a > 1$ као сума два конвергентна реда, а дивергира за $a = 1$ као сума конвергентног и дивергентног реда.

17. Чланови низа (a_n) задовољавају рекурентну формулу

$$a_n = 4a_{n-1} - a_{n-2}, \text{за } n \geqslant 3.$$

Доказати да је

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{arcctg}\,\frac{a_n^2}{2} = \frac{\pi}{12},$$

ако је $a_1 = 2$, $a_2 = 8$.

Решење. Решење посматране рекурентне једначине је

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{3}}(a^n - \frac{1}{a^n}),\ \text{za } a = 2+\sqrt{3}.$$

Лако се провери да онда важи идентитет

$$\frac{a_{n+1}^2 + a_n^2}{1 + a_n a_{n+1}} = 4,$$

што је са друге стране једнако $\frac{a_{n+2}+a_n}{a_{n+1}}$, одакле се добија релација

$$a_{n+2} = \frac{a_{n+1}^2 - a_n}{1 + a_n a_{n+1}}.$$

Индукцијом (уз кори71ење добијене релације) се показује да је

$$\sum_{k=1}^{n} \cot^{-1} a_k^2 = \cot^{-1} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \cot^{-1} a = \frac{\pi}{12}.$$

18. Наћи суму реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2n-1})$.

Решење.

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} + (\frac{1}{2} + \frac{1}{3}) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} + (\frac{1}{4} + \frac{1}{5}) \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} + \dots$$

Како је

$$\sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{k},$$

то је

$$S = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\frac{1}{2(n-1)} + \frac{1}{2n-1}}{n} = 1 + \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} + 2 \sum_{n=2}^{\infty} (\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}) = \frac{1}{2} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \frac{1}{2} + 2 \ln 2.$$