Зора Голубовић z.golubovic@yahoo.com

1 Математика 3

1.1 Обнављање

1. Доказати $\lim\limits_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = 1$.

Решење. Приметимо да је $\sqrt[n]{n} \geqslant 1$ за $n \geqslant 1$. На основу АГ неједнакости је

$$1 \leqslant \sqrt[n]{n} = \sqrt[n]{1\cdot 1\cdots\sqrt{n}\sqrt{n}} \leqslant \frac{1+1+\cdots\sqrt{n}+\sqrt{n}}{n} = \frac{2}{\sqrt{n}} + \frac{n-2}{n} \to 0+1 = 1, n\to\infty.$$

2. Наћи $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$.

Решење. Приметимо да је највећи сабирак посматране суме први, а најмањи последњи сабирак. Применом теореме о три лимеса на $\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \leqslant \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$, налази се да је лимес једнак 1.

3. Наћи $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\sum\limits_{k=1}^{n}k^{10}}$.

Решење. У посматраној суми највећи је последњи, а најмањи први сабирак. Дакле,

$$\sqrt[n]{n} = \sqrt[n]{n\cdot 1^{10}} \leqslant \sqrt[n]{\sum_{k=1}^{n}k^{10}} \leqslant \sqrt[n]{n\cdot n^{10}} = \sqrt[n]{n^{11}}.$$

Применом теореме о три лимеса као у претходном задатку, закључујемо да је

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\sum_{k=1}^{n}k^{10}} = 1.$$

4. Доказати $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sum\limits_{i=1}^{k} a_i^n} = \max\{a_1, a_2, \dots a_k\}$

Решење. Како је $a_i \leqslant \max\{a_1, a_2, \dots a_k\}$ за $i = 1, \dots k$, а максимум коначног скупа се достиже, то је

$$\max\{a_1, a_2, \dots a_k\} \leqslant \sqrt[n]{\sum_{i=1}^{k} a_i^n} \leqslant k^{\frac{1}{n}} \max\{a_1, a_2, \dots a_k\}.$$

Закључак следи применом теореме о 3 лимеса.

5. Наћи $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n + n^b}$, где су $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$.

Решење. Размотримо следеће случајеве:
1) $a > 1$:

$$\sqrt[n]{a^n + n^b} = a\sqrt[n]{1 + \frac{n^b}{a^n}} \to a, n \to \infty.$$

2) $0 < a < 1$:

$$\sqrt[n]{a^n + b^n} = \sqrt[n]{n}^b \sqrt[n]{\frac{a^n}{n^b} + 1} \to 1, n \to \infty.$$

3) $a = 1$:

$$\sqrt[n]{1 + n^b} \to 1, n \to \infty.$$

6. Наћи $\lim\limits_{n\to\infty} \prod\limits_{k=2}^{n} (1 - \frac{1}{k^2})$.

Решење. Како је

$$\prod_{k=2}^{n} (1 - \frac{1}{k^2}) = \frac{\prod\limits_{k=2}^{n} (k-1) \prod\limits_{k=2}^{n} (k+1)}{\prod\limits_{k=2}^{n} k^2},$$

померањем индекса у производима у бројиоцу, добија се

$$\prod_{k=2}^{n} (1 - \frac{1}{k^2}) = \frac{\prod\limits_{k=1}^{n-1} k \prod\limits_{k=3}^{n+1} k}{\prod\limits_{k=2}^{n} k^2},$$

и скраћивањем одговарајућих разломака,

$$\prod_{k=2}^{n}(1-\frac{1}{k^2})=\frac{n-1}{2n},$$

одакле пуштањем лимеса имамо

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}(1-\frac{1}{k^2})=\frac{1}{2}.$$

7. Наћи $\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{k=2}^{n}(1-\frac{1}{\frac{k(k+1)}{2}})$.

Решење. Како је

$$\prod_{k=2}^{n}(1-\frac{1}{\frac{k(k+1)}{2}})=\prod_{k=2}^{n}\frac{(k+2)(k-1)}{k(k+1)},$$

померањем индекса и скраћивањем разломака се добија

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{k=2}^{n}(1-\frac{1}{\frac{k(k+1)}{2}})=\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{3n}=\frac{1}{3}.$$

8. Наћи $\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{k=2}^{n}\frac{k^3-1}{k^3+1}$.

Решење.

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{k=2}^{n}\frac{k^3-1}{k^3+1}=\lim_{n\to\infty}\prod_{k=2}^{n}\frac{(k-1)(k^2+k+1)}{(k+1)(k^2-k+1)},$$

а важи идентитет $k^2-k+1=(k-1)^2+(k-1)+1$, то након померања индекса у производу и канцелације, имамо

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{k=2}^{n}\frac{k^3-1}{k^3+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{3}\frac{n^2+n+1}{n^2+n}=\frac{2}{3}.$$

Теорема (Штолц)**.** Нека је:

1) $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ строго растући низ,

2) $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=+\infty$

3) постоји $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}$.

Тада je $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}$.

9. Наћи $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt[k]{k}}{n}$.

Решење. Овде je $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt[k]{k}$ и $y_n = n$. Како je $y_n = n$ строго растући низ, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \infty$, а $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n+1} \sqrt[k]{k} - \sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt[k]{k}}{n+1-n} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n+1]{n+1} = 1$, то je применом Штолцове теореме

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt[k]{k}}{n} = 1.$$

10. Наћи $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} k^4}{n^5}$.

Решење. Овде je $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} k^4$, а $y_n = n^5$ je строго растући низ такав да $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \infty$, при чему je и $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{y_{n+1}-y_n}{n+1-n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^4}{(n+1)^5-n^5} = \frac{1}{5}$. Применом Штолцове теореме, закључујемо

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} k^4}{n^5} = \frac{1}{5}.$$

11. Наћи $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} k^p}{n^{p+1}}$, $p \in \mathbb{N}$.

Решење. Овде je $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} k^p$, а $y_n = n^{p+1}$ je строго растући низ такав да $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \infty$. Додатно, применом биномне формуле $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{y_{n+1}-y_n}{n+1-n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^p}{(n+1)^{p+1}-n^{p+1}} = \frac{1}{p+1}$. Задовољени су сви услови за примену Штолцове теореме и коначно

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} k^p}{n^{p+1}} = \frac{1}{p+1}.$$

1.2 Линеарне хомогене диференцне једначине са кораком 2 и 3

Нека је x_1, x_2 дато и

$$x_{n+2} = ax_{n+1} + bx_n, \ a, b \in \mathbb{R}.$$

Тада је карактеристична једначина

$$x^2 - ax - b = 0.$$

Нека су λ_1, λ_2 решења карактеристичне једначине.

Ако је $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то је

$$x_n = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n,$$

при чему се C_1, C_2 одређују из почетних услова.

Ако је $\lambda_1 = \lambda_2$, то је

$$x_n = C_1\lambda_1^n + C_2 n\lambda_1^n,$$

при чему се C_1, C_2 одређују из почетних услова.

12. Решити диференцну једначину

$$x_{n+2} = 5x_{n+1} - 6x_n,$$

ако је $x_1 = 5$ и $x_2 = 13$.

Решење. Корени карактеристичне једначине $x^2 - 5x + 6 = 0$ су $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$, па је опште решење облика $x_n = C_1 2^n + C_2 3^n$. Константе C_1, C_2 се одређују из почетних услова, $C_1 = C_2 = 1$. Дакле, опште решење је $x_n = 2^n + 3^n$.

13. Решити диференцну једначину

$$x_{n+2} = 2x_{n+1} + 3x_n,$$

ако је $x_0 = 3$ и $x_1 = 1$.

Решење. Корени карактеристичне једначине $x^2 - 2x - 3 = 0$ су $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 3$, па је опште решење облика $x_n = C_1(-1)^n + C_2 3^n$. Константе C_1, C_2 се одређују из почетних услова, $C_1 = 1$, $C_2 = 2$. Дакле, опште решење је $x_n = 2(-1)^n + 2^n$.

14. Решити диференцну једначину

$$x_{n+2} = 4x_{n+1} - 4x_n,$$

ако је $x_1 = 4$ и $x_2 = 12$.

Решење. Корени карактеристичне једначине $x^2 - 4x + 4 = 0$ су $\lambda_1 = 2 = \lambda_2$, па је опште решење облика $x_n = C_1 2^n + C_2 n 2^n$. Константе C_1, C_2 се одређују из почетних услова, $C_1 = C_2 = 1$. Дакле, опште решење је $x_n = 2^n(1 + n)$.

Нека су x_1, x_2, x_3 дати и

$$x_{n+3} = \alpha x_{n+2} + \beta x_{n+1} + \gamma x_n.$$

Тада је карактеристична једначина

$$x^3 = \alpha x^2 + \beta x + \gamma.$$

Нека су $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ решења карактеристичне једначине.

Ако је $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3 \neq \lambda_1$, то је

$$x_n = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n + C_3\lambda_3^n.$$

Ако је $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$, то је

$$x_n = C_1\lambda_1^n + C_2 n\lambda_1^n + C_3\lambda_3^n.$$

Ако је $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$, то је

$$x_n = C_1\lambda_1^n + C_2 n\lambda_1^n + C_3 n^2\lambda_1^n.$$

15. Решити диференцну једначину

$$x_{n+3} = -x_{n+2} + 17x_{n+1} - 15x_n,$$

ако је $x_0 = 1$, $x_1 = 3$, $x_2 = 9$.

Решење. Корени карактеристичне једначине $x^3 + x^2 - 17x + 15 = 0$ су $x_1 = 1$, $x_2 = 3$, $x_3 = -5$. Опште решење је облика $C_1 + C_2 3^n + C_3(-5)^n$. Из почетних услова се одређују константе $C_1 = 0$, $C_2 = 1$, $C_3 = 0$ као решења одговарајуег система (3 једначине са 3 непознате). Дакле, опште решење је $x_n = 3^n$.

16. Решити систем диференцних једначина

$$x_{n+1} = 2x_n - y_n,$$

$$y_{n+1} = x_n + 4y_n,$$

ако је $x_0 = 2$, $y_0 = 1$.

Решење. Из прве једначине је $y_n = 2x_n - x_{n+1}$, односно $y_{n+1} = 2x_{n+1} - x_{n+2}$. Сменом у другу једначину, добија се $x_{n+2} - 6x_{n+1} + 9x_n = 0$, одакле следи $x_n = C_1 3^n + C_2 n 3^n$. Из почетних услова се одређују C_1, C_2, односно $x_n = 3^n(2 - n)$,а добија се и $y_n = 3^n(n + 1)$.

17. Решити систем диференцних једначина

$$x_{n+1} = 2x_n + 3y_n,$$

$$y_{n+1} = x_n + 2y_n,$$

ако је $x_1 = 2$, $y_1 = 1$.

Решење. Решавањем система се добија карактеристична једначина за x_n: $x^2 - 4x + 1 = 0$, чији су корени $2 \pm \sqrt{3}$. Лако се налази $x_n = \frac{(2-\sqrt{3})^n + (2+\sqrt{3})^n}{2}$, $y_n = \frac{\sqrt{2}}{6}((2+\sqrt{3})^n - (2-\sqrt{3})^n)$.

18. Нека је

$$a_{n+1} = \frac{pa_n + q}{ra_n + s}, \ \ p, q, r, s \in \mathbb{R},$$

$$x_{n+1} = px_n + qy_n,$$

$$y_{n+1} = rx_n + sy_n,$$

при чему је $x_1 = a_1 = a$, $y_1 = 1$. Доказати да је

$$a_n = \frac{x_n}{y_n},$$

ако је $y_n \neq 0$ за све $n \in \mathbb{N}$.

Решење. Лако се проверава индукцијом.

19. Решити диференцну једначину

$$a_{n+1} = \frac{1 - 4a_n}{1 - 6a_n},$$

ако је $a_1 = 1$.

Решење. Користи се претходни задатак. Треба решити систем диференцних једначина,

$$x_{n+1} = 4x_n - y_n,$$

$$y_{n+1} = 6x_n - y_n.$$

Добија се $x_{n+2} - 3x_{n+1} + 2x_n = 0$, одакле се налази $x_n = C_1 + C_2 2^n$, а уврштавањем почетних услова, $x_n = 2^n - 1$, $y_n = 2^{n+1} - 3$. Овде је $a_n = \frac{x_n}{y_n}$.

20. Решити диференцну једначину

$$a_{n+1} = \frac{a_n - 1}{a_n + 3},$$

ако је $a_0 = 1$.

Решење. Треба решити систем

$$x_{n+1} = x_n - y_n,$$

$$y_{n+1} = x_n + 3y_n,$$

уз почетне услове $x_0 = 1$, $y_0 = 1$. Лако се налази $x_n = 2^n(1-n)$, $y_n = 2^n(1+n)$ и $a_n = \frac{1-n}{1+n}$.

1.3 Бројни редови

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ је бесконачни ред са општим чланом a_n, а $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$ је n-та парцијална сума реда. Ред конвергира ако конвергира низ његових парцијалних сума. Неопходан услов за конвергенцију реда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ је да је $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Теорема (I поредбени критеријум)**.** Нека су $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ позитивни редови. Ако почев од неког индекса важи $a_n \leqslant b_n$, тада из конвергенције реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ следи конвергенција реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, а из дивергенције реда $\sum\limits_{n=1} a_n$ следи дивергенција реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.

Теорема (II поредбени критеријум)**.** Нека су $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ позитивни редови. Ако је $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = C \in (0, \infty)$, тада су ови редови еквиконвергентни.

21. $a_0 \in [0,1]$ и $a_{n+1} = cos a_n$, $n \geqslant 0$. Да ли ред $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ конвергира?

Решење. Приметимо да је $a_n \in [cos(1), 1]$ за $n \geqslant 1$. Према томе, општи члан реда не задовољава неопходан услов конвергенције (није $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$), па ред дивергира.

22. Хармонијски ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ дивергира.

Решење. Низ парцијалних сума посматраног реда није Кошијев, па не конвергира: Нека је $\varepsilon < \frac{1}{2}$ и $m = 2n$, тада $|S_m - S_n| = \sum\limits_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} > \sum\limits_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} > \varepsilon$.

23. Сумирати ред $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)n}$.

Решење. За суму реда је потребно одредити лимес низа парцијалних сума. Приметимо, $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)n} = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-1)k} = \lim\limits_{n\to\infty} [\sum\limits_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-1)} - \sum\limits_{k=2}^{n} \frac{1}{k}]$, одакле померањем индекса и поништавањем истих сабирака налазимо $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)n} = \lim\limits_{n\to\infty} [1 - \frac{1}{n}] = 1$.

24. Испитати конвергенцију редова $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos x^n}{n^2}$

Решење. Први ред је еквиконвергентан хармонијском реду по поредбеном критеријуму, па дивергира. Такође, дивергенција се може закључити и Кошијевим критеријумом (низ парцијалних сума није Кошијев, па дивергира).
Други ред конвергира по Кошијевом критеријуму.

25. Доказати да геометријски ред $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$, $|q| < 1$ конвергира и сумирати га.

Решење. Израчунајмо најпре n-ту парцијалну суму реда. Множењем $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} q^k$ са q и одузимањем qS_n од S_n, поништавају се сви чланови у суми, изузев првог и последњег, што даје резултат $S_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$. Сума реда је лимес низа парцијалних сума: $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1-q}$.

26. Нека је низ x_n задат са

$$6x_{n+2} = 5x_{n+1} - x_n$$
$$x_1 = 1, x_2 = 2.$$

Сумирати ред

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x_n.$$

Решење. Лако се проверава да је $x_n = 20(\frac{1}{2})^n - 27(\frac{1}{3})^n$. Стога, посматрани ред можемо видети као линеарну комбинацију два конвергентна геометријска реда (за $q = -\frac{1}{2}$ и $q = -\frac{1}{3}$), чије суме лако можемо лако израчунати ако искористимо претходни задатак (напомена: потребна је мала модификација јер сума креће од $n = 1$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n = \frac{q}{1-q}$, за $|q| < 1$). Коначно, тражена сума реда је $\frac{1}{12}$.