Елементарне функције и њихови графици

За функцију $f : X \to Y$ кажемо да је

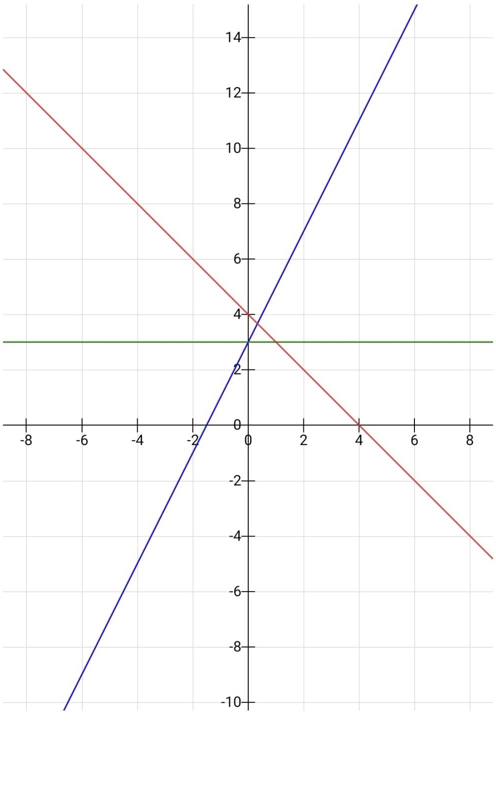
- „$1-1$” ако за све $x_1, x_2 \in X$ за које је $x_1 \neq x_2$ важи $f(x_1) \neq f(x_2)$, што је еквивалентно са тим да из $f(x_1) = f(x_2)$ следи $x_1 = x_2$;
- „на” ако за свако $y \in Y$ постоји неко $x \in X$ такво да важи $f(x) = y$;
- бијекција ако је „$1-1$” и „на”.

Свака бијекција има своју инверзну функцију, у ознаци $f^{-1} : Y \to X$, такву да за свако $x \in X$ важи $f^{-1}(f(x)) = x$ и за свако $y \in Y$ важи $f(f^{-1}(y)) = y$.
Ми ћемо углавном радити са функцијама чији је домен неки подскуп скупа $\mathbb{R}$, а кодомен управо скуп $\mathbb{R}$. Када дефинишемо тј. задајемо неку функцију, неопходно је рећи шта је њен домен, кодомен и на који начин се елементи из домена њом пресликавају. Уколико се домен не наведе експлицитно, тада га сами одређујемо као највећи подскуп скупа $\mathbb{R}$ на коме је функција добро дефинисана.

Сада ћемо пажњу посветити елементарним функцијама које су нам најбитније, јер ћемо на овом курсу најчешће радити са њима и њиховим комбинацијама, па је потребно да их добро упознамо.

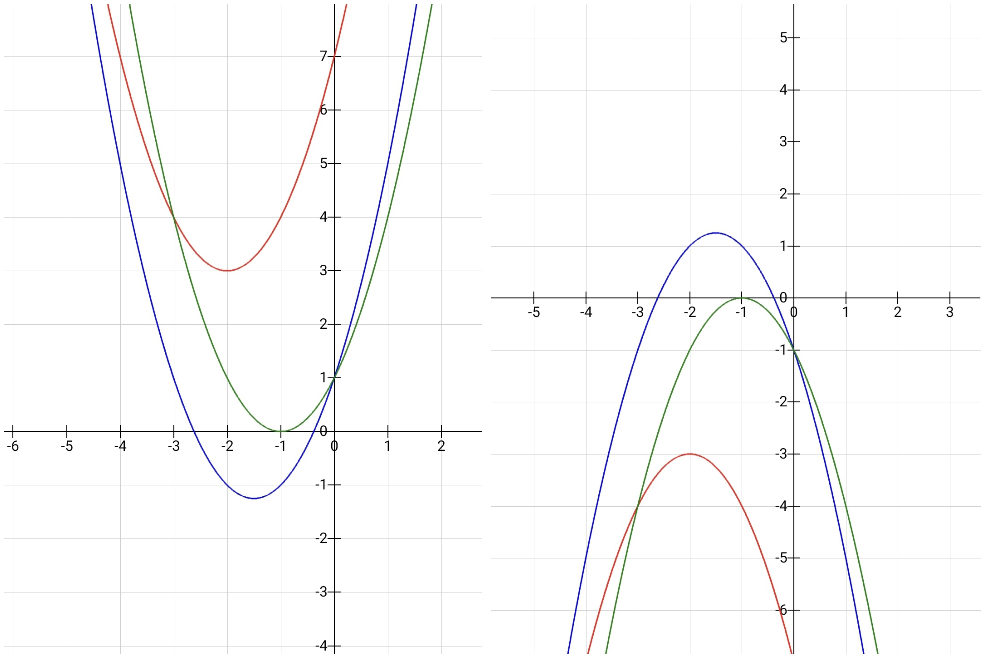
(1) Линеарна функција

Функција $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ дата са $f(x) = kx + n$ назива се линеарна функција. Њен график је једна права чији положај тј. нагиб зависи од знака броја k, који називамо коефицијентом правца функције f. На слици испод можемо видети како он изгледа за $k < 0$ (црвена боја), $k = 0$ (зелена боја) и $k > 0$ (плава боја). Још од раније знамо да ако са α означимо угао који график линеарне функције гради са позитивним делом $x-$осе, важи једнакост $k = \operatorname{tg} \alpha$.



(2) Квадратна функција

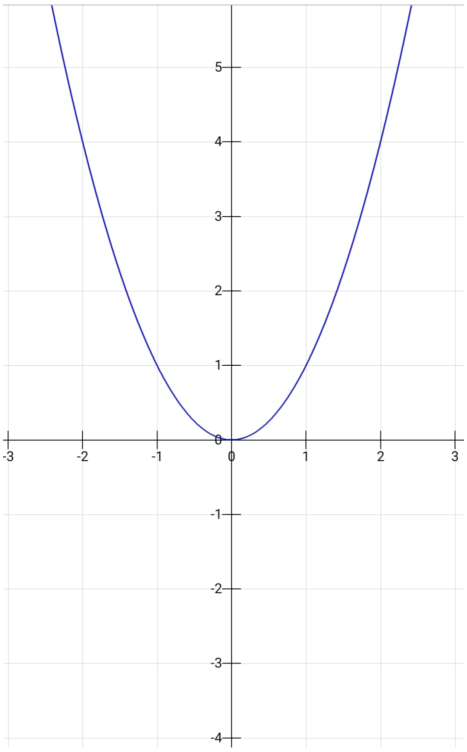
Функција $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ дата са $f(x) = ax^2 + bx + c$, уз услов $a \neq 0$, назива се квадратна функција. Њен график називамо параболом. Израз $D = b^2 - 4ac$ називамо дискриминантом ове квадратне функције. Знамо да уколико је $D > 0$, квадратна једначина $f(x) = 0$ има два различита реална решења, ако је $D = 0$, има једно реално решење, док у случају $D < 0$ нема реалних решења. Положај параболе зависи од знака бројева a и D. На левој слици је приказан случај када је $a > 0$. Плава боја одговара случају $D > 0$, зелена случају $D = 0$, а црвена случају $D < 0$. На десној слици је случај када је $a < 0$ и то плава боја за $D > 0$, зелена за $D = 0$ и црвена за $D < 0$.

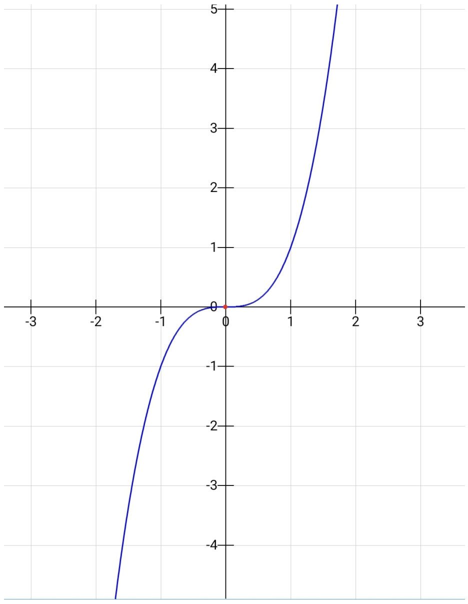


(3) Степена функција

Функција $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ дата са $f(x) = x^n$, при чему је $n \geqslant 2$ природан број, назива се степена функција. На слици лево је приказан график једне овакве функције за парно n, а десно за непарно n. Како је $(-x)^{2k} = (-1)^{2k}x^{2k} = x^{2k}$ и $(-x)^{2k+1} = (-1)^{2k+1}x^{2k+1} = -x^{2k+1}$ за свако $k \in \mathbb{N}$, видимо да за парно n важи $f(-x) = f(x)$ за свако $x \in \mathbb{R}$, док за непарно n важи $f(-x) = -f(x)$ за свако $x \in \mathbb{R}$. Функције са првим својством називамо парним функцијама, а са другим својством непарним. Дакле, за парно n степена функција је парна, а за непарно n непарна.

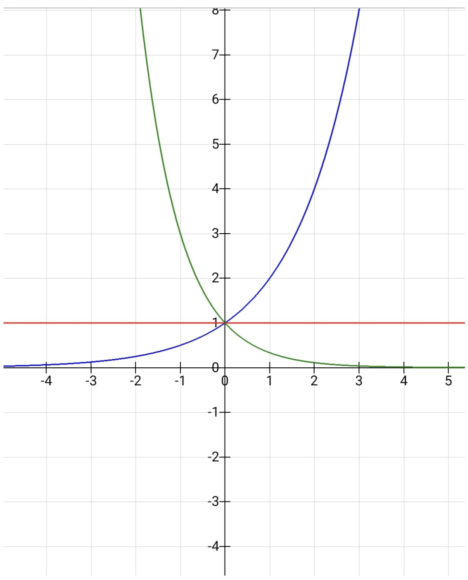
Такође, за непарно n степена функција је бијекција, док за парно n то није случај (није „$1-1$" јер је $f(x) = f(-x)$ нити је „на", јер узима само ненегативне вредности, па не постоји $x \in \mathbb{R}$ такво да је $f(x) = -1$), али ако јој сузимо домен и кодомен тј. посматрамо је као функцију $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$, и она ће постати бијекција.





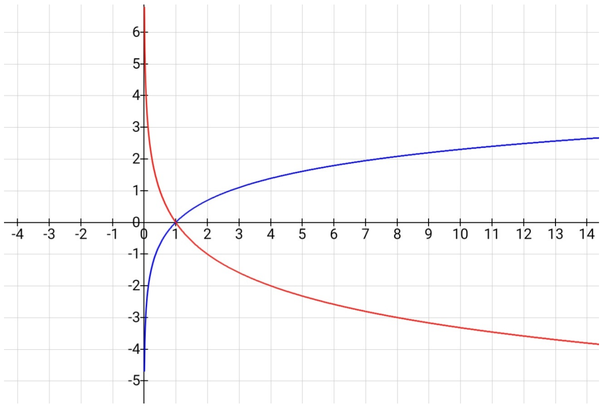
(4) Експоненцијална функција

Функција $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ дата са $f(x) = a^x$, при чему је $a > 0$ реалан број, назива се експоненцијална функција. Положај и облик графика експоненцијалне функције зависи од вредности броја a. Имамо један дегенерисан случај када је $a = 1$, јер је тада $f(x) = 1$ за свако $x \in \mathbb{R}$, па ову функцију нећемо ни сматрати за експоненцијалну, већ за линеарну као што смо и малопре навели (црвена боја на графику испод). За $a > 1$ график је приказан плавом бојом, а за $a < 1$ зеленом. Оно што је заједничко за оба недегенерисана случаја је да је $f(0) = 1$, јер је $a^0 = 1$ за било који позитивни реални број a и да је експоненцијална функција позитивна. Она није бијекција, јер, као што смо рекли, узима само позитивне вредности, али ако јој сузимо кодомен и посматрамо као функцију $f : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$, постаће бијекција.



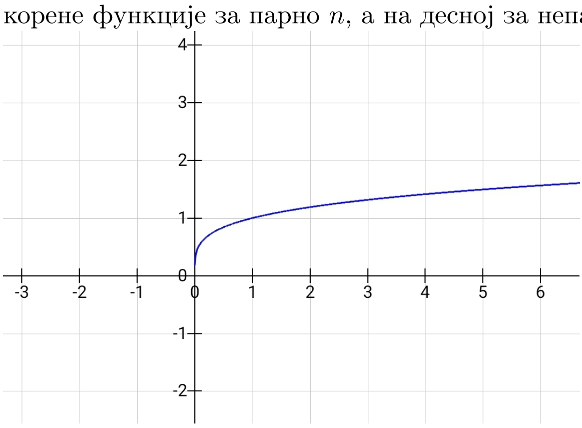
(5) Логаритамска функција

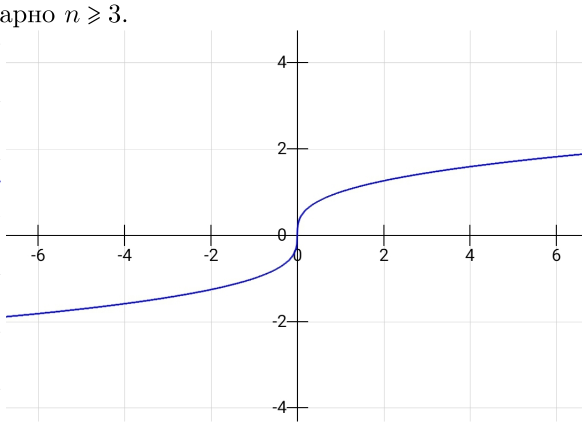
Функција $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ дата са $f(x) = \log_a x$ назива се логаритамска функција са основом a, при чему је $a > 0$ и $a \neq 1$ реалан број. Она је инверзна експоненцијалној функцији, па задовољава релацију $a^{\log_a x} = x$ за свако $x > 0$ и $\log_a(a^x) = x$ за свако $x \in \mathbb{R}$. У зависности од тога да ли је $a > 1$ (плава боја) или $a < 1$ (црвена боја) график логаритамске функције изгледа као на следећој слици.



(6) Корена функција

Функције $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ дата са $f(x) = \sqrt[n]{x}$ за непарно $n \geqslant 3$ и $g : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ дата са $g(x) = \sqrt[n]{x}$ за парно $n \in \mathbb{N}$ називају се корене функције. Функција f је инверзна степеној функцији за непарно n, па ту важе релације $(\sqrt[n]{x})^n = x$ и $\sqrt[n]{x^n} = x$ за свако $x \in \mathbb{R}$, док је функција g инверзна рестрикцији степене функције на скупу $[0, +\infty)$ за парно n, па ту такође важе релације $(\sqrt[n]{x})^n = x$ и $\sqrt[n]{x^n} = x$, али за свако $x \geqslant 0$. На левој слици видимо како изгледа график корене функције за парно n, а на десној за непарно $n \geqslant 3$.

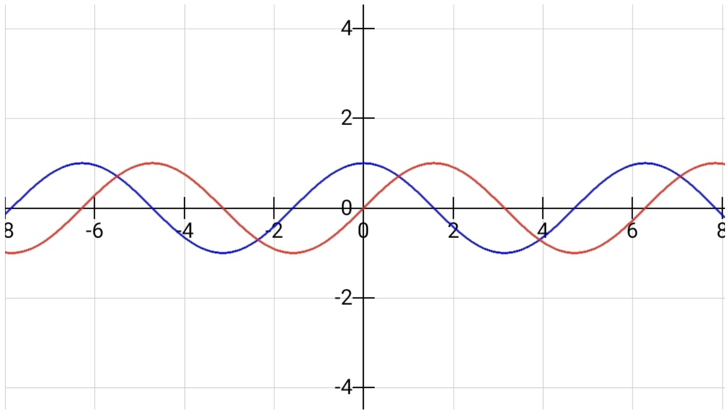




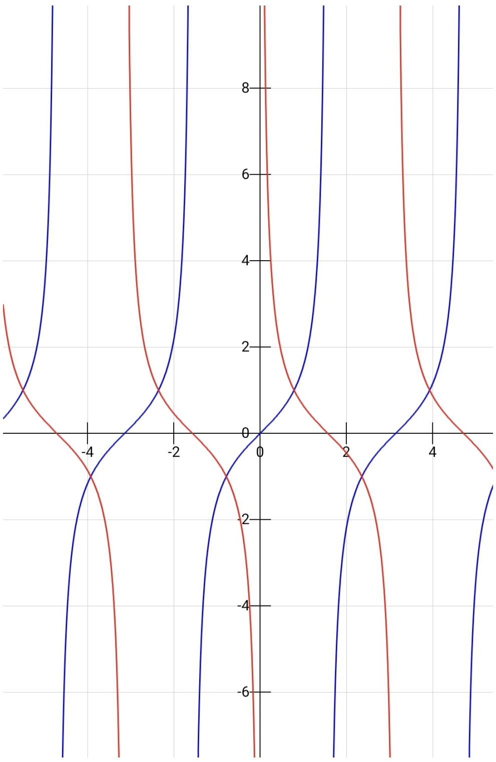
(7) Тригонометријске функције

Функције $\sin : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ и $\cos : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ чије графике можемо видети на следећој слици (црвена и плава боја, редом) су 2π-периодичне функције, што значи да је $\sin(x + 2\pi) = \sin x$ и $\cos(x + 2\pi) = \cos x$ за свако $x \in \mathbb{R}$. Даље, синусна функција је непарна, а косинусна парна тј. за свако $x \in \mathbb{R}$ важи $\sin(-x) = -\sin x$ и $\cos(-x) = \cos x$. Уз то, имамо и $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi$, где $k \in \mathbb{Z}$ и $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2}$, где $k \in \mathbb{Z}$.

Због периодичности sin није „1 − 1" функција, па самим тим није ни бијекција, али ако посматрамо њену рестрикцију на интервал $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, постаће бијекција. Слично важи и за cos, с тим што њу рестрикујемо на интервал $[0, \pi]$.

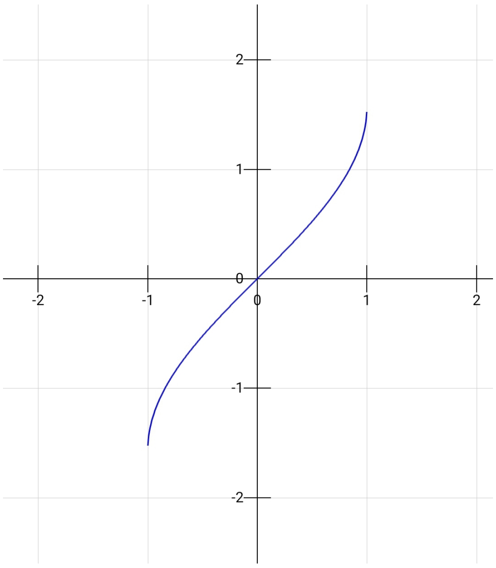
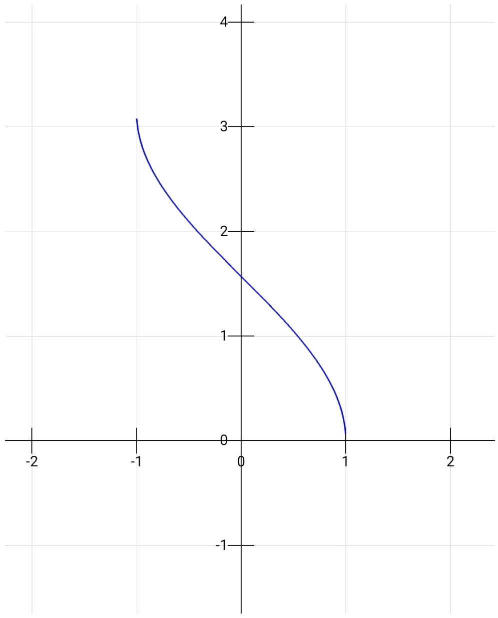


Функције $\mathrm{tg} = \frac{\sin}{\cos} : \mathbb{R} \setminus \{k\pi + \frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$ и $\mathrm{ctg} = \frac{\cos}{\sin} : \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$ су π-периодичне и њихове графике можемо видети на наредној слици (плава и црвена боја, редом).
Ни ове две функције нису бијекције јер су периодичне, али рестрикција функције tg на интервал $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ јесте, као и рестрикција функције ctg на интервал $(0, \pi)$.

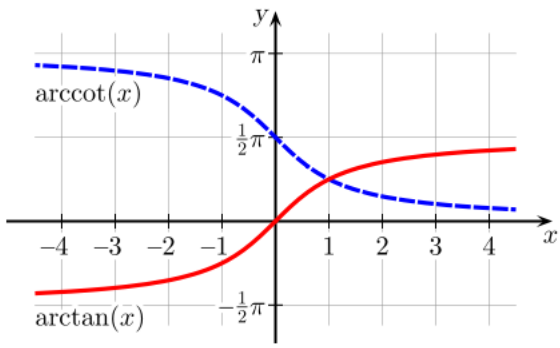


(8) Инверзне тригонометријске функције

Функција $\arcsin : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ представља инверзну функцију од функције sin, што значи да важи $\sin(\arcsin x) = x$ за свако $x \in [-1, 1]$ и $\arcsin(\sin x) = x$ за свако $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Њен график видимо на следећој слици лево.
Функција $\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$ представља инверзну функцију од функције cos, што значи да важи $\cos(\arccos x) = x$ за свако $x \in [-1, 1]$ и $\arccos(\cos x) = x$ за свако $x \in [0, \pi]$. Њен график видимо на следећој слици десно.

Функција $\operatorname{arctg} : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ је инверзна функција од функције tg, па због тога задовољава $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x$ за свако $x \in \mathbb{R}$ и $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x$ за свако $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, док је функција $\operatorname{arcctg} : \mathbb{R} \to (0, \pi)$ инверзна од функције ctg па задовољава $\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x$ за свако $x \in \mathbb{R}$ и $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x) = x$ за свако $x \in (0, \pi)$ и њихове графике можемо видети на наредној слици.



Овим смо завршили упознавање са елементарним функцијама и све што је до сада обрађено ће се сматрати познатим надаље и може се користити без додатног образлагања.

Урадимо сада један задатак.

1. Одредити домене следећих функција:

$f_1(x) = \sqrt[4]{\frac{2-x}{2x+1}} + \log_{10}\left(\frac{x+1}{1-x}\right)$, $f_2(x) = \sqrt{\sin\sqrt{x}}$, $f_3(x) = \arcsin\sqrt{x^2 - x + 1}$.

Решење: Тражимо прво скуп свих x за које је функција f_1 дефинисана. Такво x мора да задовољава следеће неједнакости $2x+1 \neq 0$, $\frac{2-x}{2x+1} \geqslant 0$, $1-x \neq 0$, $\frac{x+1}{1-x} > 0$. Прва и трећа неједнакост нам кажу да треба да важи $\underline{x \neq -\frac{1}{2}}$ и $\underline{x \neq 1}$. Друга неједнакост важи у два случаја - или ако је $2 - x \geqslant 0$ и $2x + 1 > 0$ или ако је $2 - x \leqslant 0$ и $2x + 1 < 0$. Први случај нам даје $x \leqslant 2$ и $x > -\frac{1}{2}$ што обједињено значи $x \in (-\frac{1}{2}, 2]$, а други случај нам даје $x \geqslant 2$ и $x < -\frac{1}{2}$, што није могуће. Дакле, друга неједнакост је еквивалентна са $\underline{x \in (-\frac{1}{2}, 2]}$. Слично, четврта неједнакост је тачна у два случаја - или је $x + 1 > 0$ и $1 - x > 0$ или $x + 1 < 0$ и $1 - x < 0$. Први случај је еквивалентан са $x \in (-1, 1)$, док други случај није могућ, па је четврта неједнакост еквивалентна са $\underline{x \in (-1, 1)}$. Када пресечемо све ове скупове, добићемо домен функције f_1 и лако видимо да је то скуп $(-\frac{1}{2}, 1)$. Што се тиче функције f_2 неопходно је да важи $\underline{x \geqslant 0}$ и $\sin\sqrt{x} \geqslant 0$ због дефинисаности квадратног корена. Са графика функције $\sin x$ можемо видети да важи $\sin x \geqslant 0 \Leftrightarrow x \in [2k\pi, 2k\pi + \pi]$, за неко $k \in \mathbb{Z}$, па је $\sin\sqrt{x} \geqslant 0$ еквивалентно са $\sqrt{x} \in [2k\pi, 2k\pi + \pi]$ тј. $2k\pi \leqslant \sqrt{x} \leqslant 2k\pi + \pi$ за неко $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ (овде смо се ограничили само на ненегативне k, јер је $\sqrt{x} \geqslant 0$). Квадрирањем последње неједнакости добијамо $4k^2\pi^2 \leqslant x \leqslant (2k\pi + \pi)^2$ за неко $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ тј. $x \in [4k^2\pi^2, (2k+1)^2\pi^2]$ за неко $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Како је за такве x већ испуњен неопходан услов са почетка $x \geqslant 0$, закључујемо да је домен функције f_2 управо унија скупова облика $[4k^2\pi^2, (2k+1)^2\pi^2]$ кад k прође скуп $\mathbb{N} \cup \{0\}$, што краће записујемо $D_{f_2} = \bigcup_{k=0}^{+\infty}[4k^2\pi^2, (2k+1)^2\pi^2]$. Функција f_3 нека остане за домаћи (идеја: тражимо пресек решења неједначина $x^2 - x + 1 \geqslant 0$ да би корен био дефинисан и $-1 \leqslant \sqrt{x^2 - x + 1} \leqslant 1$ да би arcsin био дефинисан).