3. Чиста предикатска логика

Неформално говорећи, исказна логика се бави структуром реченица узимајући у обзир само начин на који су неки једноставни искази повезани логичким везницима, док је значење тих полазних исказа потпуно неважно. Тако, исказна логика није довољно изражајна да би се у њој размотрало следеће чувено закључивање:

> Сваки човек је смртан.
> Сократ је човек.
> **Дакле**, Сократ је смртан.

Предикатска логика омогућава да разматрамо и смисао исказа. Пре него што детаљно опишемо поменуту логику, наводимо један пример у коме ћемо објаснити неке полазне идеје у развоју предикатске логике.

Пример 21. Природни језици нису погодни за прецизно изражавање смисла исказа. Да ли реченица *Сваки момак воли једну девојку* значи (1) *Постоји једна девојка коју воли сваки момак* или (2) *За сваког момка се може пронаћи једна девојка коју он воли*?

Потреба да се елиминишу двосмислености природног језика довела је, између осталог, до увођења тзв. *формалних језика* чије се реченице формирају према унапред утврђеним правилима. Реченице (1) и (2) формално ћемо изразити користећи:

- логичке везнике ($\vee$, $\wedge$, $\neg$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$),
- квантификаторе $\forall$ – *сваки* и $\exists$ – *неки*,
- промењиве $x, y, z, x_1, y_1, z_1, x_2, \ldots$ (којима ћемо означавати 'произвољно', 'неодређено' људско биће) и
- помоћне знаке: зарез и заграде.

Поред тога, потребно је да неким симболима означимо и особине *бити момак* и *бити девојка*, као и однос *волети*. Изјаву '*x је момак*' означавамо $M(x)$, '*x је девојка*' означавамо $D(x)$, док $V(x, y)$ значи '*x воли y*'.

Реченицама (1) и (2) редом одговарају следеће формуле:

$$\exists x(D(x) \wedge \forall y(M(y) \Rightarrow V(y, x))) \text{ и } \forall x(M(x) \Rightarrow \exists y(D(y) \wedge V(x, y))),$$

Наводимо формализације још неколико реченица природног језика.

- Свако воли некога – $\forall x \exists y V(x, y)$
- Неко воли свакога – $\exists x \forall y V(x, y)$
- Неко не воли никога – $\exists x \forall y \neg V(x, y)$

3.1. **Предикатске формуле**

8

Језик предкатске логике развијен је у једном од најважнијих логичких дела – у књижици Begriffsschrift (Појмовно писмо) од стотинак страница које је написао Готлоб Фреге и објавио 1879. године[50]. Поднаслов овог дела је: *формални језик за чисто мишљење, по узору на језик аритметике*.

Уопштено говорећи, језиком чисте предикатске логике описујемо извесне *објекте* помоћу унапред изабраних *предиката* који представљати *својства* низова објеката. Избором константи одређујемо универзум о коме говоримо, а избором предиката бирамо основне (атомске) исказе које користимо приликом описивања тог универзума.

[50] Фрегеа је, по сопственом признању, водила Лајбницова идеја о универзалном језику, lingua charactera, чији је успех лежао у добром избору симбола. Фрегеов језик је вештачки језик одређен прецизним граматичким правилима, односно синтаксом. Слободно се може сматрати да је Begriffsschrift претеча свих програмских језика.

Алфабет чисте предикатске логике чине:

• **нелогички симболи**, тј. које бирамо у складу са контекстом;

– *симболи константи*, тј. ознаке/имена објеката универзума који разматрамо;

– *симболи предиката*, тј. ознака/имена за својства (осбине) низова објеката, при чему сваки предикат има своју дужину која представља број објеката на који се предикат односи.

• **логички симболи**, које користимо у било ком контексту,

– променљиве $x, y, z, x_1, y_1, z_1, \ldots$;

– логички везници: $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\Rightarrow$ и $\Leftrightarrow$;

– логичке константе: $\bot$, $\top$;

– квантификатори: $\forall$ (универзални) и $\exists$ (егзистенцијални);

– помоћни знаци, тј. уобичајени симболи за запету и заграде.

Претходни пример:

Ако универзум чине сви људи, свака конкретна особа представља неку константу тог универзума: `Abelar`, `Eloiza` итд.

На пример, бирамо два унарна предиката M и D и један бинарни предикат V на универзуму људи, имајући на уму следећа значења:

$M(\cdot)$	бити момак
$D(\cdot)$	бити девојка
$V(\cdot, \cdot)$	волети

Предикатске формуле дефинишемо индуктивно полазећи од најједноставнијих тзв. атомских формула.

Атомску формулу одређују предикатски симбол и низ променљивих и/или константи одговарајуће дужине.

Атомске формуле у којима нема променљивих имају структуру најтипичнијих реченица говорног језика:

$M(\texttt{Abelar})$	Абелар је момак.
$D(\texttt{Eloiza})$	Елоиза је девојка.
$V(\texttt{Abelar}, \texttt{Eloiza})$	Абелар воли Елоизу.
$V(\texttt{Eloiza}, \texttt{Abelar})$	Елоиза воли Абелара.

Атомске формуле могу да садрже и променљиве: $M(x)$, $V(z, \texttt{Eloiza})$, $V(y_1, x)$ итд.

Предикатске формуле се граде применом следећих правила:

- логичке константе $\bot$ и $\top$, и све атомске формуле јесу формуле;
- ако је α формула, онда је и $\neg\alpha$ формула;
- ако су α и β формуле, онда су $(\alpha \wedge \beta)$, $(\alpha \vee \beta)$, $(\alpha \Rightarrow \beta)$, $(\alpha \Leftrightarrow \beta)$ такође формуле;
- ако је α формула и x променљива, онда су $\forall x\alpha$ и $\exists x\alpha$ формуле.

$\neg D(\texttt{Abelar})$
$V(\texttt{Eloiza}, x) \Rightarrow \neg V(x, \texttt{Eloiza})$
$D(x) \wedge \neg D(y) \Rightarrow V(x,y) \vee V(y,x)$
$\forall x\, V(x, \texttt{Eloiza})$
$\exists z\, V(\texttt{Abelar}, z)$
$\forall x\, (V(x, \texttt{Ana}) \vee V(\texttt{Ana}, x))$
$\forall x\, V(x, \texttt{Ana}) \vee \forall x V(\texttt{Ana}, x)$
$\forall x \exists y\, V(x,y)$
$\exists y \forall x\, V(x,y)$
$\exists x (V(x,y) \Rightarrow M(x) \vee D(y)) \wedge \neg\forall y V(y,y)$

Када квантификатор са неком променљивом поставимо испред формуле, тада сва појављивања те променљиве у поменутој формули постају *везана* и кажемо да су под *дејством постављеног квантификатора*. Уколико неко појављивање променљиве у формули није под дејством ниједног квантификатора, кажемо да је *слободно*.
Променљива је слободна у некој формули ако има слободно појављивање у тој формули. Када желимо да истакнемо да су све слободне променљиве формуле α неке (не нужно све) од променљивих $x_1, \ldots, x_n$, онда пишемо $\alpha(x_1, \ldots, x_n)$.

Стрелице на слици показују на слободна појављивања променљивих.

$\exists x(\boldsymbol{V}(x,y) \Rightarrow \boldsymbol{M}(x) \vee \boldsymbol{D}(y)) \wedge \neg\forall y \boldsymbol{V}(y,y)$

Појављивања осталих променљивих су везана.

Ако је α формула

$$\exists x(V(x,y) \Rightarrow M(x) \vee D(y)) \wedge \neg\forall y V(y,y)$$

онда бисмо је, ради истицања слободних променљивих, могли означити $\alpha(y)$, али и $\alpha(y,z)$, $\alpha(y, x_1, \ldots, x_n)$ и слично – важно је само да се променљива y појави на списку променљивих у загради.

Формула у којој променљиве немају слободна појављивања назива се **реченица**.

Истинитосне вредности формула су потпуно одређене када је позната:

- *валуацију атомских реченица*[51], тј. истинитосне вредности атомских реченица (атомске реченице можемо посматрати као исказна слова којима додељујемо истинитосне вредности 1 (тачно) или 0 (нетачно));
- *валуацију променљивих*, при чему вредност променљиве представља неки објекат универзума.

[51] Валуација атомских реченица се назива и *интерпретација нелогичких симбола.*

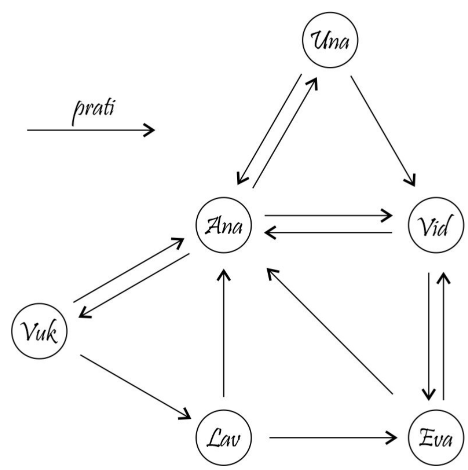
Истинитосну вредност било које формуле добијамо применом истинитосних таблица за логичке везнике и следећих правила за квантификаторе:

- формула $\forall x\alpha$ је тачна ако је за **сваки** (било који) објекат универзума додељен променљивој x формула α тачна;
- формула $\exists x\alpha$ је тачна ако је за **неки** (бар један) објекат универзума додељен променљивој x формула α тачна;

$\forall x\alpha(x)$ је тачно, ако је $\alpha(c)$ тачно, за сваки објекат c универзума.

$\exists x\alpha(x)$ је тачно, ако је $\alpha(c)$ тачно, за неки објекат c универзума.

Пример 22. На дијаграму десно приказано је шест особа и њихово међусобно праћење на некој друштвеној мрежи.



Истинитост свих атомских реченица можемо приказати и табелом:

	`Ana`	`Eva`	`Lav`	`Una`	`Vid`	`Vuk`
`Ana`	0	0	0	1	1	1
`Eva`	1	0	0	0	1	0
`Lav`	1	1	0	0	0	0
`Una`	1	0	0	0	1	0
`Vid`	1	1	0	0	0	0
`Vuk`	1	0	1	0	0	0

Универзум чине: `Ana`, `Eva`, `Lav`, `Una`, `Vid`, `Vuk`. Везе међу објектима универзума изражавамо бинарним предикатом $P(\cdot,\cdot)$ (коме одговара предикат говорног језика: '*прати*' или '*је пратилац*').

Дати дијаграм заправо дефинише валуацију свих атомских формула. На пример, истинитосна вредност реченице $P(\texttt{Ana},\texttt{Eva})$ је 0, јер '*Ана не прати Еву*'; истинитосна вредност реченице $P(\texttt{Eva},\texttt{Ana})$ је 1, јер '*Ева прати Ану*'. Користећи истинитосне таблице исказних везника једноставно одређујемо истинитосну вредност нпр. реченице

$$P(\texttt{Eva},\texttt{Ana}) \land \neg P(\texttt{Ana},\texttt{Vid}) \Rightarrow \neg(P(\texttt{Vuk},\texttt{Vuk}) \lor P(\texttt{Una},\texttt{Lav}));$$

истнитосна вредност ове реченица је 1, тј. реченица је тачна:

$$1 \land \neg 1 \Rightarrow \neg(0 \lor 0) = 1.$$

Истинитосна вредност формуле са промењивама се може одредити само када је позната и валуација промењивих.

x	`Ana`	`Eva`	`Lav`	`Una`	`Vid`	`Vuk`
$P(\texttt{Ana},x)$	0	0	0	1	1	1
$P(x,\texttt{Ana}) \lor P(x,\texttt{Una})$	1	1	1	1	1	1
$P(x,\texttt{Una}) \land P(\texttt{Lav},x)$	1	0	0	0	0	0
$P(x,\texttt{Una}) \Rightarrow \neg P(\texttt{Lav},x)$	0	1	1	1	1	1
$P(x,x)$	0	0	0	0	0	0

Из претходне табеле даље закључујемо да су тачне нпр. следеће реченице са квантификаторима:

$$\begin{array}{ll} \exists x\, P(\texttt{Ana},x) & \neg\forall x\, P(\texttt{Ana},x) \\ \exists x\,(P(x,\texttt{Ana}) \lor P(x,\texttt{Una})) & \forall x\,(P(x,\texttt{Ana}) \lor P(x,\texttt{Una})) \\ \neg\exists x\, P(x,x) & \neg\forall x\, P(x,x) \end{array}$$

Било би веома заморно рачунати истинитосну вредност реченице

$$(*) \qquad \exists x \forall y\,(P(y,x) \Rightarrow P(x,y)),$$

разматрајући истиност формуле $P(y,x) \Rightarrow P(x,y)$ за све могуће вредности променљивих. Једноставније је реченицу $(*)$ превести на говорни језик: *постоји особа која прати сваког свог пратиоца*, и пажљивом анализом дијаграма потражити 'загонетну особу'. Није тешко уочити да Уна и Вук прате сваког свог пратиоца. Дакле, реченица $(*)$ је тачна. Да ли је тачна реченица $\exists x \forall y\,(P(x,y) \Rightarrow P(y,x))$?

Пример 23. Велику историјску вредност Аристотелова силогистика која представља први покушај изградње једног формално-логичког система. Разматране су реченице следећег облика[56]:

(a) *Сви S јесу P* (универзално афирмативна реченица)

[56] Од давнина се самогласници a, e, i, o користе за означавање наведених типова реченица.

(e) *Ниједан* S *није* P (универзално негативна реченица)

(i) *Неки* S *јесу* P (партикуларно афирмативна реченица)

(o) *Неки* S *нису* P (партикуларно негативна реченица)

Са данашњег становишта, Аристотелов систем је само једноставни део предикатске логике унарних предиката, коју разматрамо искључиво на непразним универзумима.

(a) *Сви* S *јесу* P: $\forall x(S(x) \Rightarrow P(x))$

(e) *Ниједан* S *није* P: $\forall x(S(x) \Rightarrow \neg P(x))$

(i) *Неки* S *јесу* P: $\exists x(S(x) \wedge P(x))$

(o) *Неки* S *нису* P: $\exists x(S(x) \wedge \neg P(x))$

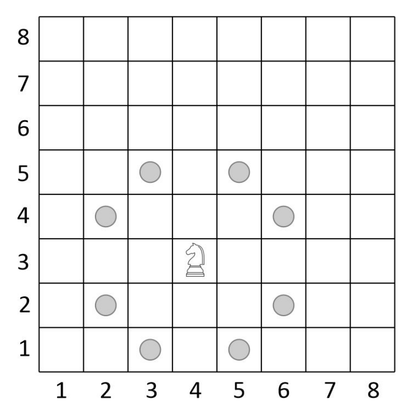
Главни проблем који је Аристотел решавао јесте трагање за типом закључка из две хипотезе у којима учествују три предиката (термина, како их је Аристотел звао): мали, велики, средњи. Средњи предикат, заједнички за обе хипотезе, посредовао је у извођењу закључка малом и великом предикату. Наводимо неколико силогизама:

$$\begin{array}{c} \text{(ePM)} \\ \text{(iSM)} \\ \hline \text{(oSP)} \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{Ниједан } P \text{ није } M. \\ \text{Неки } S \text{ јесу } M. \\ \hline \text{Неки } S \text{ нису } P. \end{array} \quad \Bigg| \quad \begin{array}{c} \text{(aMP)} \\ \text{(iSM)} \\ \hline \text{(iSP)} \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{Сваки } M \text{ јесте } P \\ \text{Неки } S \text{ јесу } M. \\ \hline \text{Неки } S \text{ јесу } P. \end{array}$$

Као корисну вежбу остављамо да се одреде закључи следећих силогизама.

$$\begin{array}{c} \text{(aMP)} \\ \text{(aSM)} \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{(aMP)} \\ \text{(iSM)} \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{(ePM)} \\ \text{(aSM)} \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{(aPM)} \\ \text{(oSM)} \\ \hline \end{array}$$

Пример 24. Употреба променљивих значајно повећава изражајну моћ предикатског језика. Значај променљивих илуструјемо репрезентацијом информација о кретању скакача на шаховској табли. Поља табле означавамо паром бројева од 1 до 8.



Узимајући да универзум чине бројеви 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8; посматрамо предикат дужине 4 (тј. 4-арни предикат): $S(x_1, x_2, x_3, x_4)$

'дозвољено је да скакач пређе са поља (x_1, x_2) на поље (x_3, x_4).'

Један начин да наведемо све допустиве потезе јесте да их излистамо:

$$(*) \quad S(1,1,2,3), S(1,1,3,2), \ldots$$

Листа је прилично дугачка и садржи 336 чињеница. Ситуацију можемо поравити, и листу знатно скратити ако опишемо неке опште чињенице о кретању скакача. На пример, следеће својство симетричности, скраћује горњу листу на пола:

(σ_1) $\forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 \forall x_4 (S(x_1, x_2, x_3, x_4) \Rightarrow S(x_3, x_4, x_1, x_2))$.

Уз додатне опште услове, може се изоставити још више појединачних чињеница листе $(*)$.

(σ_2) $\forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 \forall x_4 (S(x_1, x_2, x_3, x_4) \Rightarrow S(x_1, x_4, x_3, x_2))$

(σ_3) $\forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 \forall x_4 (S(x_1, x_2, x_3, x_4) \Rightarrow S(x_2, x_1, x_4, x_3))$

(σ_4) $\forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 \forall x_4 (S(x_1, x_2, x_3, x_4) \Rightarrow S(x_3, x_2, x_1, x_4))$

Интуитивно је јасно да из $S(4, 3, 5, 1)$,

- на основу (σ_1) закључујемо $S(4, 1, 5, 3)$;
- на основу (σ_2) закључујемо $S(5, 1, 4, 3)$;
- на основу (σ_3) закључујемо $S(3, 4, 1, 5)$;
- на основу (σ_4) закључујемо $S(5, 3, 4, 1)$.

Пример 25. Нека универзум чине бројеви: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Бинарни предикат '... мањи од ...' означавамо $<$, и користимо тзв. *инфиксну* нотацију: пишемо $x < y$ уместо $<(x, y)$.

Уместо навођења истинитости сваког од 100 исказа, приказаних у табели десно, довољно је навести следећих девет конкретних веза

$$(*) \quad 0 < 1,\ 1 < 2,\ 2 < 3,\ 3 < 4,\ 4 < 5,\ 5 < 6,\ 6 < 7,\ 7 < 8,\ 8 < 9.$$

$<$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
2	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1
3	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1
4	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1
5	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1
6	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1
7	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

и неколико општих особина:

(O_1) $\forall x \neg x < x$

(O_2) $\forall x \forall y (x < y \Rightarrow \neg y < x)$

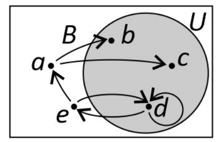
(O_3) $\forall x \forall y \forall z (x < y \wedge y < z \Rightarrow x < z)$

Ослањајући се на 'здраворазумску логику', једноставно уочавамо да се из списка $(*)$ и особина (O_1), (O_2), (O_3) може закључити, на пример: $3 < 8$; $\neg\, 5 < 2$; $\neg\, 7 < 7$ итд.

▼ Вежбе

1. На универзуму људи изабрани су предикати:
$R(x,y)$ – 'x је родитељ од y';
$M(x)$ – 'x је мушког пола'.
Саставити формуле:
$\varphi_M(x,y)$ – 'x је мајка од y' $\quad$ $\varphi_B(x,y)$ – 'x и y су рођена браћа'
$\varphi_T(x,y)$ – 'x је тетка од y' $\quad$ $\varphi_D(x,y)$ – 'x је деда од y'
$\varphi_S(x,y)$ – 'x је стриц од y' $\quad$ $\varphi_U(x,y)$ – 'x је ујак од y'

2. На универзуму који чине објекти a, b, c, d, e, дефинисана су два предиката: унарни U и бинарни B, следећим таблицама:



x	$U(x)$
a	0
b	1
c	1
d	1
e	0

B	a	b	c	d	e
a	0	1	1	0	0
b	0	0	0	0	0
c	0	0	0	0	0
d	0	0	0	1	1
e	1	0	0	1	0

Наравно, много је сликовитији графички приказ универзума и предиката које на њему посматрамо.
(а) Одредити истинитосну вредност формуле са једном слободном промењљивом x, у зависности од вредности додељене промењљивој x.

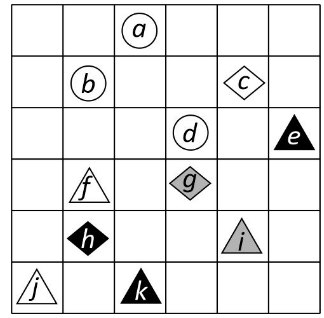
x	$U(x) \Rightarrow B(x,x)$	$U(x) \vee \neg B(x,x)$	$U(x) \wedge B(x,x)$
a	1		
b	0		
c	0		
d	1		
e	1		

(б) Одредити истинитосну вредност формуле са две слободне промењљиве x, y, у зависности од вредности које су додељене промењљивама x и y.

x	a	a	a	a	a	b	b	b	b	b	c	c	c	c	c	d	d	d	d	d	e	e	e	e	e
y	a	b	c	d	e	a	b	c	d	e	a	b	c	d	e	a	b	c	d	e	a	b	c	d	e
$U(x) \wedge U(y) \Rightarrow \neg B(x,y)$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1
$\neg(U(x) \vee U(y)) \wedge B(x,y)$																									
$\neg U(x) \wedge B(x,y) \Rightarrow U(y)$																									
$B(x,y) \vee B(y,x)$																									
$B(x,y) \vee \neg B(x,y)$																									

(в) Испитати тачност следећих реченица:
- $\exists x(U(x) \Rightarrow B(x,x))$
- $\forall x(B(x,x) \Rightarrow U(x))$
- $\forall x \exists y(B(x,y) \wedge U(y))$
- $\neg \forall x(U(x) \Rightarrow B(x,x))$
- $\forall x \exists y(B(x,y) \wedge U(x))$
- $\forall x(\neg U(x) \Rightarrow \exists y\,(U(y) \wedge B(x,y)))$

3. Да би студентима приближили предкатску логику, логичари Џон Барвајз и Џон Ечеменди креирали су софтвер и написали пратећу књигу *Тарскијев свет*. Универзум Тарскијевог света чине геометријске фигуре, различитих боја, распоређене на квадратној мрежи. Од корисника/читаоца се очекује да саставља предикатске формуле и одреди да ли су тачне или нетачне у датом свету.



На слици лево приказан је један Тарскијев свет, чији су објекти названи једнословним именима: a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k. Свет треба описивати следећим предикатима:

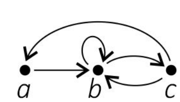
$T(x)$ – 'x је троугао' $K(x)$ – 'x је круг' $R(x)$ – 'x је ромб'
$B(x)$ – 'x је бео' $S(x)$ – 'x је сив' $C(x)$ – 'x је црн'
$J(x,y)$ – 'x је јужно од y' (одн. 'x је у реду који је испод y')
$I(x,y)$ – 'x је источно од y' (одн. 'x је у колони која је десно од y')

Попунити табелу:

говорни језик	предикатски језик	истинитост
g је јужно од a	$J(g,a)$	тачно
d није истично од f	$\neg I(d,f)$	нетачно
постоји црни ромб	$\exists x(R(x) \land C(x))$	тачно
сваки круг је бео	$\forall x(K(x) \Rightarrow B(x))$	тачно
постоји троугао истично од a	$\exists x(T(x) \land I(x,a))$	
сваки троугао је јужно од c	$\forall x(T(x) \Rightarrow J(x,c))$	
	$\forall x(T(x) \land J(x,c))$	
	$\exists x(T(x) \land I(a,x))$	
	$\exists x(T(x) \Rightarrow I(a,x))$	
не постоји сиви троугао		
свака црна фигура је ромб или троугао		
сваки црни круг је истично од f		
	$\forall x \forall y(C(x) \land S(y) \Rightarrow I(x,y))$	
	$\exists x(C(x) \land \forall y I(y,x))$	
	$\forall x(B(x) \Rightarrow \exists y I(x,y))$	
	$\exists x(B(x) \land \forall y(C(y) \Rightarrow I(x,y)))$	
	$\forall x(K(x) \lor \exists y J(y,x))$	
	$\exists x \exists y[R(x) \land T(y) \land [(B(x) \land B(y)) \lor$ $\lor (S(x) \land S(y)) \lor (C(x) \land C(y))]]$	
постоје сива и црна фигура које су истог облика		

4. Свака формула са једном слободном променљивом $\alpha(x)$ дефинише део универзума који чине само они објекти за које је формула α постаје тачна, када променљиву x заменимо тим објектом. Над универзумом који чине три објекта a, b и c, задат је бинарни предикат:

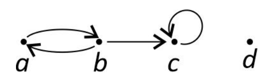
$$R(x,y) \ - \ \text{'из } x \text{ иде стрелица ка } y\text{'}$$



За сваку од формула $\alpha(x)$ навести за које вредности x је тачна.

$\alpha(x)$	је тачно када x добије вредност:
$\neg R(x,x)$	a, c
$\forall y R(y,x)$	
$\exists y(R(y,x) \wedge R(y,y))$	
$\exists y(R(y,x) \wedge R(x,y))$	
$R(x,x) \Rightarrow \forall y\, R(x,y)$	

5. На универзуму од четири објекта, a, b, c, d, дефинисан је бинарни предикат:

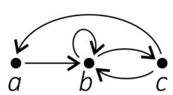


$$E(x,y) \text{ -- 'из } x \text{ иде стрелица ка } y\text{'}$$

5.1. Одредити формулу $\alpha(x)$ која ће бити тачна само када променљива x добије неку од вредности:
- a, b и c (а нетачна је за d);
- a, c и d (а нетачна је за b);
- b и c (а нетачна је за a и d);
- a и b (а нетачна је за c и d).

5.2. Испитати тачност следећих реченица:
- $\exists x \forall y \neg E(x,y)$
- $\forall x(E(x,x) \wedge \neg\exists y E(y,x) \Rightarrow \forall z E(x,z))$
- $\forall x\,(\neg\exists y\, E(x,y) \Rightarrow \neg E(x,x))$
- $\forall x(\exists y\, E(x,y) \Rightarrow \exists z\, E(y,z))$

6. Над универзумом који чине три објекта a, b и c, задат је бинарни предикат R (сликом доле лево, одн. табелом доле десно).



R	a	b	c
a	0	1	0
b	0	1	1
c	1	1	0

6.1. Одредити истинитосне вредности формула $\forall y\, R(x,y)$ и $\forall y\, R(y,x)$, за разне вредности слободне променљиве x, попуњавањем табеле. (Унутство: за изабрано x, треба за све вредности променљиве y испитати истинтосне вредности формула $R(x,y)$, одн. $R(y,x)$.)

x	y	$R(x,y)$	$\forall y\, R(x,y)$	$R(y,x)$	$\forall y\, R(y,x)$
	a	0		0	
a	b	1	0	0	0
	c	0		1	
	a	0		1	
b	b	1	0	1	1
	c	1		1	
	a	1		0	
c	b	1	0	1	0
	c	0		0	

6.2. Испитати тачност следећих реченица:
- $\neg\exists x \forall y\, R(x,y)$
- $\exists x \forall y\, R(y,x)$
- $\forall x \exists y\, \neg R(x,y)$
- $\forall y \exists x\, R(y,x)$

Формуле постају разумљивије, ако $R(x,y)$ читамо као реченицу

из x иде стрелица ка y.

Тада:

- $\forall y R(x,y)$ значи *из x иде стрелица ка сваком објекту*;
- $\forall y R(y,x)$ значи *из сваког објекта иде стрелица ка x*;
- $\exists y R(x,y)$ значи *из x иде стрелица ка неком објекту*;
- $\exists y R(y,x)$ значи *постоји објекат из ког иде стрелица ка x*;
- $\exists x \forall y\, R(x,y)$ значи *постоји објекат из ког иде стрелица ка сваком објекту*;
- $\forall x \exists y\, R(x,y)$ значи *из сваки објекта иде стрелица ка неком објекту*;