Вероватноћа - списак задатака

1. Бацају се истовремено 2 новчића. Одредити скуп елементарних исхода.
2. У кутији су четири листића означена бројевима 1, 2, 3 и 4. Извлачимо листиће
   (а) без враћања,
   (б) са враћањем,

   све док не извучемо листић са непарним бројем. Одредити скуп елементарних исхода.
3. Стрелац гађа у циљ облика кружне мете полупречника дужине K, при чему се мери растојање поготка од центра мете. Одредити скуп елементарних исхода.

КЛАСИЧНА ДЕФИНИЦИЈА ВЕРОВАТНОЋЕ

4. Коцка чије су све стране обојене подељена је у 1000 мањих коцки једнаке величине. Израчунати вероватноћу да случајно изабрана коцка има тачно две обојене стране.
5. Из кутије у којој се налазе цедуље означене бројевима од 1 до n извлачи се једна по једна цедуља,
   (а) без враћања,
   (б) са враћањем,

   и бележе се добијени бројеви. Израчунати вероватноћу да буду редом извучени бројеви 1, 2, $\ldots$, n.
6. Хотел има n соба поређаних једна до друге у правој линији. На случајан начин k ($k < n$) гостију се размешта по собама. Израчунати вероватноћу да они заузму k суседних соба.
7. Из складишта са n предмета, од којих је k неисправно, узима се одједном m предмета. Израчунати вероватноћу да међу тим предметима буде тачно l неисправних.
8. Израчунати вероватноћу да се записивањем по случајном редоследу две цифре 1, једне цифре 2, три цифре 3, две цифре 4 и једне цифре 6 добије деветоцифрени број који на непарним местима има непарне цифре.
9. Двадесет идентичних куглица девојчица на случајан начин распоређује у пет кутија. Израчунати вероватноћу да тачно две кутије буду празне.

ФОРМУЛА УКЉУЧЕЊА И ИСКЉУЧЕЊА

10. Четири брачна пара на случајан начин седају у ред са 8 столица . Израчунати вероватноћу да ниједан пар не седи заједно.
11. За биоскопску салу која има n нумерисаних места све карте су распродате. Гледаоци случајно бирају места без обзира на карте које имају. Израчунати вероватноћу да бар један гледалац седне на место за које има карту. Чему тежи та вероватноћа кад $n \to \infty$?

12. У воз који има m вагона пење се n ($n \geq m$) путника. Израчунати вероватноћу да у сваки вагон уђе бар по један путник.

13. Кесица сличица садржи тачно једну сличицу једног од n фудбалера из неког фудбалског клуба. Ако је купљено m кесица, где је $m \geq n$, израчунати вероватноћу да су скупљене сличице свих фудбалера из тог клуба.

14. Играч добија 13 насумично одабраних карата из стандардног шпила од 52 карте. Израчунати вероватноћу да играч бар од једног знака не добије ниједну карту.

ГЕОМЕТРИЈСКА ВЕРОВАТНОЋА

15. Из сегмента $[0, 1]$ на случајан начин бирају се два броја. Израчунати вероватноћу да њихов збир буде мањи од 1, а производ већи од $\frac{2}{9}$.

УСЛОВНА ВЕРОВАТНОЋА И НЕЗАВИСНОСТ

16. Коцкица за игру се баца два пута. Ако је у оба бацања добијен број мањи од четири, израчунати вероватноћу да је збир палих бројева непаран.

17. У ред са 10 седишта на случајан начин седају три особе. Особе X и Y нису селе једна до друге. Израчунати вероватноћу да је особа Z села између особа X и Y.

18. Свака од 15 испитних цедуља садржи по два питања која се не понављају. Студент зна одговор на 25 питања. Да би положио испит он треба да одговори или на оба питања са цедуље коју прву извуче или на једно питање са цедуље коју прву извуче и на прво питање са цедуље коју другу извуче. Шта је вероватније: да студент положи или да не положи испит?

19. Човек има у џепу n кључева од којих само један отвара врата. Кључеве редом вади из џепа (без враћања) док не нађе одговарајући кључ. Израчунати вероватноћу да тражени кључ извуче у k-том извлачењу, где је k фиксиран број такав да је $1 \leq k \leq n$.

20. Под претпоставком да су вероватноће рађања мушког и женског детета једнаке, испитати независност догађаја A - деца нису истог пола и B - међу децом је највише једна девојчица, ако:

    (а) у породици има троје деце;

    (б) у породици има четворо деце.

21. Играчи A и B имају једнаке шансе да у једној партији неке игре освоје бод. Нема нерешених игара. Побеђује онај који први сакупи 6 бодова. Израчунати вероватноћу да победи играч A, односно играч B, ако је тренутни резултат 4:2 за играча A.

22. На турниру треба одиграти три партије стоног тениса против шампиона A и нешто слабијег играча B по једној од шема $A - B - A$ или $B - A - B$. Награда се добија ако се победи у бар две партије узастопно. Коју шему изабрати?

ФОРМУЛА ПОТПУНЕ ВЕРОВАТНОЋЕ И БАЈЕСОВА ФОРМУЛА

23. У кутији са резервним деловима, који се по изгледу не разликују, је пет нових и три стара дела. Случајно се бирају два дела одједном и користе извесно време, после чега се враћају у кутију. Након тога се опет случајно бирају два дела одједном.

    (а) Израчунати вероватноћу да оба другоодабрана дела буду нова.

    (б) Ако су другоодабрани делови нови, израчунати вероватноћу да су првоодабрани делови били стари.

24. У кутији се налазе три куглице, од којих свака може бити бела или црна. Све претпоставке о броју белих куглица у кутији су једнако вероватне. Из кутије се четири пута, са враћањем, бира куглица. Који је највероватнији састав кутије ако је једном извучена црна и три пута бела куглица?

25. Вероватноћа да је одређена књига у библиотеци је p. Ако је та књига у библиотеци, онда се са истом вероватноћом налази на било којој од n полица. Прегледано је m $(m < n)$ полица и та књига није нађена. Израчунати вероватноћу да је она сада у библиотеци.

26. Претпоставимо да имамо три карте које су исте величине, али тако да је прва карта са једне стране црне боје, са друге црвене, друга карта је црвена са обе стране, а трећа је црна са обе стране. Случајно се извлачи једна карта, а затим се случајно окреће на једну страну. Ако је горња страна извучене карте црвена, израчунати вероватноћу да је доња страна те карте црна.

27. У првој кутији налазе се само беле куглице, а у другој кутији $\frac{1}{4}$ куглица су црне, а $\frac{3}{4}$ беле. Случајно се бира кутија и из ње се извлачи једна куглица. Испоставило се да је бела. Извучена куглица се враћа у кутију из које је извучена и из ње се опет извлачи једна куглица. Израчунати вероватноћу да ова куглица буде црна.

28. Испред играча се налазе два шпила. Један је стандардан од 52 карте, док у другом фали један краљ. Играч на случајан начин бира шпил и извлачи 5 карата, једну по једну, без враћања. Израчунати вероватноћу да на крају извлачења у руци има 4 исте карте (истог броја, односно слова, али различитих знакова), ако се зна да је прва карта коју је извукао краљ.

29. Претпоставља се да је 1% спортиста на Олимпијским играма користило недозвољене супстанце, тј. допинг. Светска антидопинг агенција у циљу спречавања допинга у спорту врши непосредно након Олимпијских игара тестирања случајно одабраних спортиста. Тест даје позитиван резултат са вероватноћом 0.99 уколико је особа која је тестирана заиста користила недозвољене супстанце и негативан резултат са вероватноћом 0.98 уколико особа која је тестирана није користила недозвољене супстанце. Резултати тестова рађених на једној истој особи сматрају се независним. Ако се зна да је особа X имала позитиван резултат на два теста, израчунати вероватноћу да је та особа користила недозвољене супстанце.

30. У једној кошари се налази 15 тениских лоптица, од чега 9 некоришћених, док се у другој кошари налази 8 некоришћених и 7 коришћених лоптица. Играч А из на случајан начин изабране кошаре случајно бира 3 лоптице. Користи их у првом гему, након чега их враћа у кошару из које су узете. Играч Б у следећем гему случајно бира 3 лоптице из те исте кошаре. Израчунати вероватноћу да је играч Б изабрао 3 некоришћене лоптице, ако се зна да је играч А изабрао 3 некоришћене лоптице.

ДИСКРЕТНЕ СЛУЧАЈНЕ ВЕЛИЧИНЕ. МАТЕМАТИЧКО ОЧЕКИВАЊЕ И ДИСПЕРЗИЈА.

31. У смеру кретања аутомобила налазе се редом три семафора који раде независно један од другог. На сваком семафору се с вероватноћом $p = 0.6$ појављује црвено и с вероватноћом $q = 0.4$ зелено светло. Случајна величина X представља број семафора поред којих пролази аутомобил до првог заустављања. Одредити закон и функцију расподеле вероватноћа случајне величине X.

32. У кутији се налазе три куглице нумерисане бројевима 1,2,3. Из кутије се на случајан начин бирају две куглице, једна по једна са враћањем. Нека је X количник бројева добијених у првом и другом извлачењу.

    (а) Одредити закон расподеле случајне величине X.

    (б) Скицирати график функције расподеле F_X.

    (в) Израчунати вероватноћу да X узме целобројну вредност.

33. Нека је X случајна величина чији је закон расподеле

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ p & 1-2p & p \end{pmatrix},$$

за $p \in (0, \frac{1}{2})$. Наћи законе расподеле за случајне величине $Y = X^2$ и $Z = e^X$. Израчунати DY и DZ.

34. Из скупа $\{1, 2, \ldots, n\}$ $(n \geq 2)$ на случајан начин бирају се одједном два различита броја x и y. Нека је $S = \max\{x, y\}$. Одредити расподелу случајне величине S и израчунати $P\{0.5 < S \leq 3.5\}$, $P\{S > 2\}$, као и очекивање ES.

35. Вероватноћа да кошаркаш погоди кош је $p \in (0, 1)$. Он гађа све док не погоди. Израчунати очекивани број покушаја до поготка. Израчунати очекивани број промашаја до поготка.

36. Број честица које емитује неки радиоактивни извор у току једне секунде је $X \cdot 10^{10}$, где је X случајна величина са Пуасоновом $\mathcal{P}(\lambda)$, $a > 0$ расподелом. Израчунати очекивањи број честица које емитује извор у току једне секунде као и DX.

37. Тест има 10 питања, а свако питање на тесту има m $(m \geq 2)$ понуђених одговора. Студент зна тачан одговор на неко питање са вероватноћом $p \in (0, 1)$, независно од осталих питања. Ако не зна одговор, студент на случајан начин заокружује један од понуђених одговора. Израчунати вероватноћу да је студент заокружио тачан одговор на тачно 6 питања.

38. Случајна величина X има биномну $\mathcal{B}(n, p)$ расподелу. Ако је $Y = n - X$, одредити расподелу случајне величине Y и израчунати EY и DY.

ДИСКРЕТНИ СЛУЧАЈНИ ВЕКТОРИ. НЕЗАВИСНОСТ СЛУЧАЈНИХ ВЕЛИЧИНА.

39. Новчић се се баца четири пута. Нека је X броја палих писама, а Y највећи број узастопних понављања писма. Одредити заједничку расподелу вектора (X, Y) и испитати независност случајних величина X и Y.

40. Из кутије у којој су четири цедуље нумерисане бројевима 1,2,3,4 извлаче се цедуље, без враћања, док се не извуче цедуља са непарним бројем. Нека је X збир извуцхених бројева, а Y број извлачења. Одредити расподелу случајног вектора (X, Y),

као и маргиналне расподеле за X и Y. Израчунати EX и EY. Испитати независност случајних величина X и Y и израчунати очекивање производа X и Y, EXY.

41. За случајне величине X и Y из претходног задатка, одредити расподелу случајне величине Z, где је $Z = XY$.

42. Нека су X_1 и X_2 независне случајне величине са геометријском $\mathcal{G}(p), 0 < p < 1$, расподелом. Ако је $Y = max\{X_1, X_2\}$, одредити расподелу случајне величине Y.

43. Нека су $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ и $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$ независне случајне величине. Наћи респоделу њиховог збира, $Z = X + Y$.

АПРОКСИМАЦИЈА БИНОМНЕ РАСПОДЕЛЕ ПУАСОНОВОМ РАСПОДЕЛОМ

44. Из скупа бројева $\{1, 2, ..., n\}$ на случајан начин се, са враћањем, извлачи $2n$ бројева ($n \geq 100$). Одредити најмањи број k такав да вероватноћа да број извучених четворки не буде мањи од k износи највише 0.05.

АПСОЛУТНО НЕПРЕКИДНЕ СЛУЧАЈНЕ ВЕЛИЧИНЕ

45. Дата је функција

$$f(x) = \begin{cases} kx + \frac{7}{12}, & x \in (-4, -1), \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

(а) Израчунати константу k за коју је $f(x)$ густина расподеле (вероватноћа) неке случајне величине X.

(б) Одредити функцију расподеле те случајне величине.

(в) Израчунати $P\{X \geq -\frac{3}{2}\} \cup \{-\frac{5}{2} < X \leq 0\}$.

(г) Израчунати очекивање EX и дисперзију DX.

46. Наћи расподелу случајне величине $Y = aX + b,\ a, b \in \mathbb{R}$, где је $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$.

47. Нека је X непрекидна случајна величина са густином

$$f_X(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}, \quad -\infty < x < \infty.$$

Наћи расподелу случајне величине Y, где је $Y = X^2$.

48. Случајна величина X има експоненцијалну $\mathcal{E}(\lambda)$ расподелу. Одредити функције расподела следећих случајних величина:

(а) $Y = |1 - X|$;

(б) $Z = \min\{X, X^2\}$.

49. Време (у сатима) до доласка аутобуса 1 има експоненцијалну $\mathcal{E}(2)$ расподелу, док време до доласка аутобуса 2 има експоненцијалну $\mathcal{E}(\lambda)$ расподелу, где је $\lambda > 0$ непознат параметар. Ако је очекивано време до доласка првог од та два аутобуса 15 минута, одредити вредност параметра λ.

50. Број φ се случајно бира из сегмента $[0, \pi/2]$, а затим се кроз тачку $A(0,1)$ повлачи права која са позитивним делом x осе заклапа угао φ. Ако је D удаљеност те праве од координатног почетка, одредити расподелу случајне величине D.

51. Случајна величина X има униформну $\mathcal{U}[-1,2]$ расподелу. Ако је $Y = \min\{X, 1\}$, одредити расподелу случајне величине Y и израчунати очекивање EY.

52. Случајна величина X има $\mathcal{U}[-1,4]$ расподелу. Одредити расподелу случајне величине $Y = |X|$ и израчунати EY.

53. Случајна величина X има $\mathcal{U}[0,4]$ расподелу. Одредити расподелу случајне величине $Y = [X]$.

54. Случајна величина X има стандардну експоненцијалну расподелу $\mathcal{E}(1)$. Одредити расподелу случајне величине $Y = X - [X]$.

55. Показати да је очекивање случајне величине X која има гама $\gamma(\alpha, \beta)$, $\alpha > 0, \beta > 0$ расподелу $EX = \alpha/\beta$ и дисперзија $DX = \alpha/\beta^2$.

56. Показати да за $X \in \mathcal{E}(\lambda)$ важи $P\{X > s + t | X > t\} = P\{X > s\}$, $s, t > 0$.

АПРОКСИМАЦИЈА БИНОМНЕ РАСПОДЕЛЕ НОРМАЛНОМ

57. Фабрика у току дана произведе 1000 аутомобила од којих сваки са вероватноћом 0.05 захтева дораду.

    (а) Израчунати вероватноћу да у току изабраног дана између 800 и 975 аутомобила буде исправно.

    (б) Колики треба да буде капацитет паркинга, па да са вероватноћом 0.9 буде довољан за аутомобиле који чекају дораду?

58. Студент полаже тест који се састоји од n ($n > 100$) питања. За свако питање је понуђено шест одговора од којих је само један тачан. Студент насумично заокружује одговоре. За сваки тачан одговор студент добија 20 поена, док му се за нетачан одузима 2 поена. Колико најмање треба да буде n па да студент са вероватноћом од бар 90% освоји 100 или више поена?

59. Два биоскопа се такмиче у продаји карата за 1000 посетилаца. Претпоставимо да сваки гледалац бира независно са истом вероватноћом један од два биоскопа. Нека је N број седишта у сваком од биоскопа ($N \le 1000$). Израчунати N тако да је вероватноћа да су сва места у првом биоскопу попуњена мања од 1%.

АПСОЛУТНО НЕПРЕКИДНИ СЛУЧАЈНИ ВЕКТОРИ

60. Дата је функција расподеле дводимензионе случајне величине (X, Y):

$$F(x,y) = \begin{cases} 1 - 2^{-x} - 2^{-y} + 2^{-x-y}, & x \ge 0,\ y \ge 0, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

(а) Одредити густину расподеле случајне величине (X, Y).

(б) Испитати независност случајних величина X и Y.

(в) Ако је $T = \{(x,y) | x \ge 0, y \ge 0, x + y \le 1\}$, израчунати $P\{(X,Y) \in T\}$.

61. Тачка $A(X, Y)$ се случајно бира у квадрату D са теменима $(1,0),(0,1),(-1,0)$ и $(0,-1)$. Одредити густину расподеле случајног вектора (X, Y), као и маргиналне расподеле случајних величина X и Y. Израчунати EXY.

62. Случајна величина X има експоненцијалну $\mathcal{E}(\lambda)$ расподелу. Ако је $Y = \frac{\lambda}{\mu} \cdot X$, одредити расподелу случајне величине Y као и случајног вектора (X, Y).

63. За густине f_X и f_Y независних случајних величина X и Y важи $f_X(x) = \frac{2}{x^3},\ x \geq 1$ и $f_Y(y) = \frac{1}{4},\ y \in [-2, 2]$. Ако је $Z = 2X - Y + 1$, одредити густину расподеле случајне величине Z.

64. Случајне величине X и Y су независне и имају исту експоненцијалну $\mathcal{E}(1)$ расподелу. Ако је $Z = |X - Y|$, одредити густину расподеле случајне величине Z.

65. Време потребно да се машина поправи је случајна величина T која има експоненцијалну расподелу чије је метематичко очекивање $\frac{1}{3}$. Фирма наплаћује поправку $X = 10 + e^{\frac{T}{3}}$ (долара).

    а) Израчунати очекивану цену поправке.

    б) Одредити расподелу случајне величине X и испитати да ли је она апсолутно непрекидног типа.

    в) Одредити функцију расподеле случајног вектора (X, T).

66. Случајна величина X има експоненцијалну $\mathcal{E}(1)$ расподелу, случајна величина Y има униформну $\mathcal{U}[0, h]$ расподелу и независне су. Ако је $Z = X + Y$, одредити густину расподеле случајне величине Z.

67. Случајна величина X има Бернулијеву расподелу са параметром $p = \frac{1}{2}$, а случајна величина Y је независна од X и има униформну расподелу на интервалу $[0, 1]$. Одредити расподелу њиховог збира, $Z = X + Y$.

ЧЕБИШОВЉЕВА НЕЈЕДНАКОСТ

68. Ако за случајну величину X важи да је $EX = 3$ и $DX = 0.01$, проценити $P\{2.5 < X < 3.5\}$.

КОВАРИЈАНСА И КОЕФИЦИЈЕНТ КОРЕЛАЦИЈЕ

69. Куглице нумерисане бројевима 1,2,3,4,5,6,7,8 убацују се редом, једна по једна, у једну од две кутије. Ако је X број куглица нумерисаних парним бројевима које се налазе у првој кутији, а Y број куглица нумерисаних бројевима дељивим са 4 у другој кутији, израчунати коефицијент корелације случајних величина X и Y.

70. Из сета од 12 различитих батерија, међу којима су 3 нове, за које се подразумева да су исправне, 4 коришћене али исправне и 5 коришћених али неисправних, истовремено се бирају две. Нека је X број исправних, а Y број коришћених батерија међу одабраним. Одредити коефицијент корелације случајних величина X и Y и испитати да ли су међусобно независне.

71. На случајан начин се бира једна од вредности из скупа вредности $A = \{-2, -1, 1, 2\}$. Нека случајна величина X представља одабрану вредност и нека је случајна величина Y дата са $Y = X^2$. Одредити коваријацију $cov(X, Y)$ случајних величина X и Y, а затим испитати да ли су оне независне.

72. Случајна величина X има униформну $\mathcal{U}[-1,1]$ расподелу. Ако је $Y = |X|$, израчунати коефицијент корелације случајних величина X и Y.

73. Случајна величина X има униформну $\mathcal{U}[-1,1]$ расподелу. Ако је $Y = sgnX$, израчунати коефицијент корелације случајних величина X и Y.

74. Случајни вектор (X,Y) има униформну расподелу на унутрашњој области квадрата са теменима $(0,0),(1,0),(1,1),(0,1)$. Израчунати коефицијент корелације случајних величина T и Y, где је $T = min\{\frac{X}{Y}, \frac{1}{2}\}$.

УСЛОВНА РАСПОДЕЛА

75. У првој кутији се налазе четири правилна полиедра и то један са 4 стране, један са 6 страна и два са 8 страна, док се у другој кутији налази шест правилних полиедара и то три са 4 стране, два са 6 страна и један са 8 страна. Сваки полиедар је хомоген и стране су му нумерисане бројевима $\{1,\ 2,\ 3,\ ...,\ k\}$, где је k број страна полиедра. Резултат бацања полиедра је број којим је нумерисана страна на коју је пао. Ива случајно бира један полиедар из друге кутије и ставља у прву, након чега извлачи један полиедар из прве кутије и баца га. Нека је S број страна извученог полиедра. Одредити расподелу случајне величине S, ако је Ива након бацања извученог полиедра добила број три.

76. Дводимензиона случајна величина (X,Y) има униформну расподелу на троуглу са теменима $(0,0)$, $(1,0)$ и $(0,1)$. Одредити $f_{X|Y=y}(x)$ - условну густину расподеле случајне величине X при услову $Y = y$.

77. Из сегмента $[0,1]$ случајно се бира број X, а затим се из сегмента $[\frac{X}{2}, X]$ случајно бира број Y. Одредити расподелу случајне величине Y.

78. Случајна величина X има експоненцијалну $\mathcal{E}(1)$ расподелу. Ако је Y случајна величина таква да је
$$f_{Y|X=x}(y) = xe^{-xy},$$
за све $x > 0$ и $y > 0$, израчунати $P\{X > 2|Y > 1\}$.

79. Дводимензиона случајна величина (X,Y) има униформну расподелу на троуглу са теменима $(0,0)$, $(3,0)$ и $(2,1)$. Одредити $f_{Y|X\in[1,2]}(y)$ - условну густину расподеле случајне величине Y при услову $X \in [1,2]$.

80. Заједничка густина случајног вектора (X,Y) је
$$f(x,y) = \frac{4}{(xy)^2}, x \geq 2, y \geq 2.$$
Ако је $Z = ln(\frac{X}{2}) + ln(\frac{Y}{2})$, одредити условну расподелу случајне величине Z при услову $Z > 1$.

КАРАКТЕРИСТИЧНА ФУНКЦИЈА

81. Одредити карактеристичну функцију случајне величине:

    а) X_1 која има $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix}$ расподелу;

    б) X_2 која има биномну $\mathcal{B}(n,p)$ расподелу;

в) X_3 која има Пуасонову $\mathcal{P}(\lambda)$ расподелу и доказати да ако X_3 има Пуасонову $\mathcal{P}(\lambda)$ расподелу, а X_4 има Пуасонову $\mathcal{P}(\mu)$ расподелу и независне су, онда њихов збир $X_3 + X_4$ има Пуасонову $\mathcal{P}(\lambda + \mu)$ расподелу;

г) X_5 која има експоненцијалну $\mathcal{E}(\lambda)$ расподелу;

д) X_6 која има Ерлангову $\gamma(n, \beta)$ расподелу;

ђ) X_7 чија густина расподеле је $f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}, x \in R$, а затим израчунати очекивање EX_7 и дисперзију DX_7.

82. Одредити расподелу случајне величине за чију карактеристичну функцију $\varphi(t)$ важи да је:

   а) $\varphi(t) = \frac{3+\cos t}{4}$;

   б) $\varphi(t) = \frac{1}{2-e^{it}}$.

83. Ако су Y и Z независне случајне величине такве да је $X = Y+Z$, где X има $\mathcal{U}(0, n+1)$, а Y има $\mathcal{U}(0,1)$ распореду, одредити расподелу случајне величине Z.

КОНВЕРГЕНЦИЈЕ НИЗОВА СЛУЧАЈНИХ ВЕЛИЧИНА

84. Општи члан низа X_n има закон расподеле $X_n \begin{pmatrix} 0 & n \\ 1-\frac{6}{\pi^2 n^2} & \frac{6}{\pi^2 n^2} \end{pmatrix}$ а $Y_n = 1 - \frac{X_n}{n^2}$. Испитати све четири врсте конвергенције низа случајних величина (X_n), односно низа случајних величина (Y_n).

85. За сваки природан број n случајна величина X_n има униформну $U[0, \frac{1}{n}]$ расподелу, а независна од ње случајна величина Y_n има закон расподеле $\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Ако је $Z_n = X_n + Y_n$, испитати све четири врсте конвергенције низа случајних величина (Z_n).

86. Дат је низ независних случајних величина чији општи члан X_n има униформну $U[0,n]$ расподелу. Ако је $Y_n = \min\{1, X_n\}$, испитати све четири врсте конвергенције низа случајних величина (Y_n).

87. Општи члан X_n низа независних случајних величина има густину расподеле $f_n(x) = ne^{-nx}, x \geq 0$. Ако је $Y_n = \frac{1}{X_n}$, испитати све четири врсте конвергенције низа случајних величина Y_n.

88. Општи члан низа независних случајних величина (X_n) има густину расподеле $f_n(x) = \frac{n}{x^{n+1}}, x \geq 1$. Испитати све четири врсте конвергенције тог низа.

89. Дат је низ независних случајних величина чији општи члан X_n има $\begin{pmatrix} \frac{-1}{2^n} & \frac{1}{2^n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ расподелу и нека је $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$. Доказати да низ случајних величина (S_n) конвергира у расподели ка случајној величини S_∞, где S_∞ има униформну $U[-1,1]$ расподелу.

90. За општи члан X_n низа независних случајних величина важи да је $X_n = nY - [nY]$, где је Y случајна величина чија је густина расподеле $f(y) = 2y, y \in [0,1]$. Испитати конвергенцију у расподели низа случајних величина (X_n).

91. Општи члан низа независних случајних величина (X_n) има униформну $\mathcal{U}(0, n)$ расподелу. Ако је $Y_n = e^{-X_n}$, испитати све четири врсте конвергенције низа случајних величина (Y_n).

ЗАКОН ВЕЛИКИХ БРОЈЕВА

92. Испитати да ли закон великих бројева важи за низ независних случајних величина чији општи члан X_n има:

   а) закон расподеле $\begin{pmatrix} -\sqrt{\ln n} & \sqrt{\ln n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$;

   б) густину расподеле $f_{X_n}(x) = ne^{-nx}, x \geq 0$;

   в) закон расподеле $\begin{pmatrix} -2^n & 2^n \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

93. За карактеристичну функцију општег члана X_n низа независних случајних величина важи да је $\varphi_n(t) = cos(2t)$. Ако је $Y_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(\frac{1}{4}X_i + \frac{1}{2})$, испитати све четири врсте конвергенције низа случајних величина (Y_n).

94. Дат је низ независних случајних величина чији општи члан X_n има расподелу

$$\begin{pmatrix} -n & 0 & n \\ \frac{1}{3^n} & 1 - \frac{2}{3^n} & \frac{1}{3^n} \end{pmatrix}.$$

Израчунати, ако постоји, $\lim\limits_{n\to\infty} P\{|S_n| < \frac{n}{2}\}$.

ЦЕНТРАЛНА ГРАНИЧНА ТЕОРЕМА

95. Рачунар у процесу сабирања бројева врши заокруживање на најближи цео број. Претпоставља се да су грешке настале заокруживањем независне и униформно расподељене на сегменту $[-0.5, 0.5]$.

   а) Ако се сабира 1500 бројева, израчунати вероватноћу да апсолутна вредност укупне грешке буде већа од 15.

   б) Колико се највише бројева може сабрати, па да са вероватноћом 0.9 вредност укупне грешке буде мања од 10?

96. а) Случајна величина X има униформну $\mathcal{U}(0, 1)$ расподелу. Ако је $Y = -ln(X)$, одредити расподелу случајне величине Y.

   б) Општи члан X_n низа независних случајних величина има униформну $\mathcal{U}(0, 1)$ расподелу. Ако је $Z_n = \frac{1}{\sqrt{n}} ln\left(e^{-n}\prod\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{X_k}\right)$, испитати конвергенцију у расподели низа случајних величина (Z_n).

97. Општи члан низа независних случајних величина (X_n) има густину расподеле $f(x) = \frac{16x^3e^{-2x}}{6}, x \geq 0$.

   а) Ако је $Y_n = \sqrt{n}(\overline{X}_n - 2)$, где је $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} X_k$, испитати конвергенцију у расподели низа случајних величина (Y_n).

б) Израчунати, ако постоји,

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\overline{X}_n \leq \frac{1+2\sqrt{n}}{\sqrt{n}}\right\}.$$