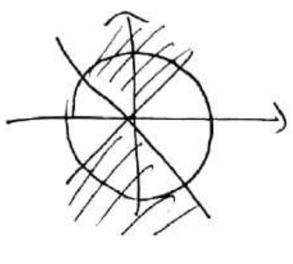
$|z| = r_k = (k+\frac{1}{2})\pi$

$|\cos z| = |\cos x \operatorname{ch} y - i \operatorname{sh} y \sin x| \Rightarrow |\cos z|^2 = \cos^2 x \operatorname{ch}^2 y + \operatorname{sh}^2 y \sin^2 x = \cos^2 x + \operatorname{sh}^2 y$

$|\sin z| = |\sin x \operatorname{ch} y + i \operatorname{sh} y \cos x| \Rightarrow |\sin z|^2 = \sin^2 x \operatorname{ch}^2 y + \operatorname{sh}^2 y \cos^2 x = \sin^2 x + \operatorname{sh}^2 y$

$|\operatorname{ctg} z|^2 = \dfrac{\cos^2 x + \operatorname{sh}^2 y}{\sin^2 x + \operatorname{sh}^2 y}$, $\dfrac{1}{|z|} = \dfrac{1}{(k+\frac{1}{2})\pi} \leq 1 \quad \forall k \in \mathbb{N}$

$|\operatorname{ctg} z|^2 \leq 1 \Leftrightarrow \cos^2 x + \cancel{\operatorname{sh}^2 y} \leq \sin^2 x + \cancel{\operatorname{sh}^2 y} \Leftrightarrow \cos^2 x \leq \sin^2 x$



$\Leftrightarrow 2\cos^2 x \leq 1$

$\Leftrightarrow \cos^2 x \leq \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \cos x \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ или $\cos x \geq -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$x \in (\frac{\pi}{4} + 2l\pi, \frac{3\pi}{4} + 2l\pi)$

$\cup (\frac{5\pi}{4} + 2l\pi, \frac{7\pi}{4} + 2l\pi), \ l \in \mathbb{Z}$

За $x \in \overbrace{(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}) \cup (\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4})}^{D} + 2l\pi$, $l \in \mathbb{Z}$ остаје да се провери ограниченост

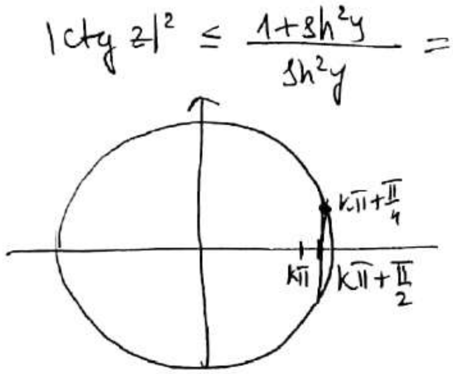
$|\operatorname{ctg} z|^2 \leq \dfrac{1+\operatorname{sh}^2 y}{\operatorname{sh}^2 y} = 1 + \dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 y}$

sh y је растућа ф-ја

$((\operatorname{sh} y)^2)' = 2 \operatorname{sh} y \operatorname{ch} y$, па је

$\operatorname{sh}^2 y$ растућа за $y > 0$, а

опадајућа за $y < 0$.



$\to k \in \mathbb{N}$

Ако је $x \in D$ онда $y \geq \sqrt{(k\pi + \frac{\pi}{2})^2 - (k\pi + \frac{\pi}{4})^2} = y_k > 0$

или $y \leq -\sqrt{(k\pi + \frac{\pi}{2})^2 - (k\pi + \frac{\pi}{4})^2} = -y_k < 0$

$$\begin{cases} y \geq y_k \Rightarrow \operatorname{sh}^2 y \geq \operatorname{sh}^2 y_k \Rightarrow |\operatorname{ctg} z|^2 \leq 1 + \dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 y_k} \\ y \leq -y_k \Rightarrow \operatorname{sh}^2 y \geq \operatorname{sh}^2(-y_k) = \operatorname{sh}^2 y_k \end{cases}$$

$y_k = \sqrt{\frac{\pi}{4} \cdot (2k\pi + \frac{3\pi}{4})} \geq \frac{\pi}{4}\sqrt{3}$

$\Rightarrow |\operatorname{ctg} z|^2 \leq 1 + \dfrac{1}{\operatorname{sh}^2(\frac{\pi}{4}\sqrt{3})} = M^2$

$|\operatorname{ctg} z - \frac{1}{z}| \leq M + 1 \quad \forall z$ што $|z| = r_k$

Дакле, испуњени су услови Митаг-Лефлерове теореме.

$$\Longrightarrow \quad \operatorname{ctg} z - \frac{1}{z} = \sum_{k} \left(\frac{1}{z-k\pi} + \frac{1}{k\pi} \right) \cdot 1$$

сума по свим половима, код нас $z_k = k\pi$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

Ред је апсолутно и равномерно конвергентан на сваком ограниченом делу $\mathbb{C}$ на коме је g аналитичка. Стога у реду можемо мењати поредак чланова

$$\operatorname{ctg} z = \frac{1}{z} + \lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=-n}^{-1} \left(\frac{1}{z-k\pi} + \frac{1}{k\pi} \right) + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{z-k\pi} + \frac{1}{k\pi} \right) \right)$$

$$= \frac{1}{z} + \lim_{n\to+\infty} \left(\left(\frac{1}{z-\pi} + \frac{1}{z+\pi} \right) + \left(\frac{1}{z-2\pi} + \frac{1}{z+2\pi} \right) + \dots + \left(\frac{1}{z-n\pi} + \frac{1}{z+n\pi} \right) \right)$$

$$= \frac{1}{z} + \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{2z}{z^2-\pi^2} + \frac{2z}{z^2-(2\pi)^2} + \dots + \frac{2z}{z^2-(n\pi)^2} \right)$$

$$= \frac{1}{z} + 2z \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^2-(n\pi)^2} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2-n^2\pi^2}$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{\operatorname{ctg} z = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2-n^2\pi^2}}$$

(2) Доказати да је: $\frac{1}{\sin^2 z} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-n\pi)^2}$.

$$(\operatorname{ctg} z)' = \left(\frac{\cos z}{\sin z}\right)' = \frac{-\sin^2 z - \cos^2 z}{\sin^2 z} = \frac{-1}{\sin^2 z}$$ ($\sin^2 z + \cos^2 z = 1$ као и у $\mathbb{R}$) проверите!

Ред из претходног задатка: $\operatorname{ctg} z = \frac{1}{z} + \sum_{k} \left(\frac{1}{z-k\pi} + \frac{1}{k\pi}\right)$, $\underline{k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}} = \mathbb{Z}'$

је равн. конв. на сваком ограниченом $\subseteq \mathbb{C}$ на коме је $\operatorname{ctg} z - \frac{1}{z}$ аналитичка, па се може диференцирати члан по члан на таквим скуповима.

$$\frac{-1}{\sin^2 z} = \frac{-1}{z^2} + \sum_{k\in\mathbb{Z}'} \frac{-1}{(z-k\pi)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sin^2 z} = \frac{1}{z^2} + \sum_{k\in\mathbb{Z}'} \frac{1}{(z-k\pi)^2} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(z-k\pi)^2}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-n\pi)^2}$$

(3) Доказати да је: $\frac{1}{e^z - 1} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 + (2n\pi)^2}$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = \frac{e^{2z} - 1}{2e^z} \qquad \operatorname{cth} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z} = \frac{e^{2z}+1}{e^{2z}-1} = 1 + \frac{2}{e^{2z}-1}$$

$$\operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \frac{e^{2z}+1}{2e^z} \qquad e^{2z} - 1 = (\operatorname{cth} z - 1)^{-1} \cdot 2$$

$$\frac{1}{e^{2z}-1} = \frac{1}{2} \frac{1}{(\operatorname{cth} z - 1)^{-1}} = \frac{1}{2}(\operatorname{cth} z - 1)$$

$$\boxed{\frac{1}{e^z - 1} = \frac{1}{2}\left(\operatorname{cth}\frac{z}{2} - 1\right)}$$

Из задатка (1):

$$\operatorname{ctg} z = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2\pi^2}$$

ако уместо z ставимо iz добија се

$$\operatorname{ctg} iz = \frac{1}{iz} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2iz}{-z^2 - n^2\pi^2}$$

$$\operatorname{ctg} iz = \frac{\cos iz}{\sin iz}, \quad \cos iz = \frac{e^{i(iz)} + e^{-i(iz)}}{2} = \frac{e^{-z} + e^{z}}{2} = \operatorname{ch} z$$

$$\sin iz = \frac{e^{i(iz)} - e^{-i(iz)}}{2i} = \frac{e^{-z} - e^{z}}{2i} = -i\cdot(-\operatorname{sh} z) = i \operatorname{sh} z$$

$\Rightarrow \quad \operatorname{ctg} iz = \frac{\operatorname{ch} z}{i \operatorname{sh} z} = -i \operatorname{cth} z$

$$\operatorname{ctg} z = i \cdot \operatorname{ctg} iz = i \cdot \left(\frac{1}{iz} - i\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2+n^2\pi^2} \right) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2+n^2\pi^2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{e^z-1} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{\frac{z}{2}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z}{\frac{z^2}{4}+n^2\pi^2} - 1 \right) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2+4n^2\pi^2} - \frac{1}{2}$$

(што је и требало доказати)

(4) Доказати да је:

$$\frac{1}{\sin z \cdot \operatorname{sh} z} = \frac{1}{z^2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{4n\pi z^2}{(z^4-n^4\pi^4)\operatorname{sh} n\pi}$$

фја $f(z) = \frac{1}{\sin z \operatorname{sh} z} - \frac{1}{z^2}$ има отклоњив сингуларитет у 0

Зато развијмо f у Митаг-Лефлеров развој.

$$\lim_{z\to 0} \left(\frac{1}{\sin z \operatorname{sh} z} - \frac{1}{z^2} \right) = \lim_{z\to 0} \frac{z^2 - \sin z \operatorname{sh} z}{z^2 \sin z \operatorname{sh} z} = \lim_{z\to 0} \frac{z^2 - \left(z - \frac{z^3}{6} + o(z^3)\right)\left(z + \frac{z^3}{6} + o(z^3)\right)}{z^2\left(z - \frac{z^3}{6} + o(z^3)\right) \cdot \left(z + \frac{z^3}{6} + o(z^3)\right)}$$

$$= \lim_{z\to 0} \frac{\frac{z^6}{6^2} + o(z^4)}{z^4 + o(z^4)} = 0$$

$f(0) = 0$ дефинишемо

f има сингуларитете $z_k = k\pi$

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = 0 \iff e^z = e^{-z} \iff e^{2z} = 1 = e^{2k\pi i}$$

$$\iff z = k\pi \cdot i$$

$k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

Дакле, сингуларитети су и $z_k' = k\pi i$.

$$b_k = \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z) = \lim_{z\to z_k} (z-z_k) \cdot \frac{z^2 - \sin z \operatorname{sh} z}{z^2 \sin z \operatorname{sh} z} = \frac{z_k^2 - \sin z_k \operatorname{sh} z_k}{z_k^2 \cdot (-1)^k \operatorname{sh} k\pi} = \frac{1}{(-1)^k \operatorname{sh} k\pi}$$

$$(\sin z \operatorname{sh} z)' = \cos z \operatorname{sh} z + \sin z \operatorname{ch} z$$

$$\sin z_k \operatorname{ch} z_k + \cos z_k \operatorname{sh} z_k = \underbrace{\sin k\pi}_{=0} \operatorname{ch} k\pi + \cos k\pi \operatorname{sh} k\pi$$

$$= (-1)^k \operatorname{sh} k\pi$$

$$b_k' = \operatorname*{Res}_{z=z_k'} f(z) = \lim_{z\to z_k'} (z-z_k') \frac{z^2 - \sin z \operatorname{sh} z}{z^2 \sin z \operatorname{sh} z} = \frac{z_k'^2}{z_k'^2 \cdot \sin k\pi i \operatorname{ch} k\pi i} = \frac{1}{\sin k\pi i \operatorname{ch} k\pi i}$$

$$\sin k\pi i = \frac{e^{ik\pi i} - e^{-ik\pi i}}{2i} = \frac{e^{-k\pi} - e^{k\pi}}{2i} = i \cdot \operatorname{sh} k\pi$$

$$\operatorname{ch} k\pi i = \frac{e^{k\pi i} + e^{-k\pi i}}{2} = \cos k\pi = (-1)^k$$

$$\boxed{\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{(-1)^k \operatorname{sh} k\pi} \\ b_{-k} &= \frac{1}{(-1)^{-k} \operatorname{sh}(-k\pi)} = \frac{1}{-(-1)^k \operatorname{sh} k\pi} \\ &= -b_k \end{aligned}}$$

$$\Rightarrow \operatorname*{Res}_{z=z_k'} f(z) = \frac{1}{(-1)^k i \operatorname{sh} k\pi} = b_k', \quad b_{-k}' = -b_k'$$

Када докажемо да је $f(z) = \frac{1}{\sin z \operatorname{sh} z} - \frac{1}{z^2}$ ограничена на (*) кружницама $|z| = r_k$, где $r_k \xrightarrow[k\to\infty]{} +\infty$, моћи ћемо да применимо Митаг-Лефлерову теорему. (као у 1 зад. можемо мењати поредак чланова)

$$f(z) = \sum_k b_k \left(\frac{1}{z - k\pi} + \frac{1}{k\pi} \right) + \sum b_k' \left(\frac{1}{z - k\pi i} + \frac{1}{k\pi i} \right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=-n}^{-1} b_k \left(\frac{1}{z-k\pi} + \frac{1}{k\pi} \right) + \sum_{k=1}^{n} b_k \left(\frac{1}{z-k\pi} + \frac{1}{k\pi} \right) + \sum_{k=-n}^{-1} b_k' \left(\frac{1}{z-k\pi i} + \frac{1}{k\pi i} \right) + \sum_{k=1}^{n} b_k' \left(\frac{1}{z-k\pi i} + \frac{1}{k\pi i} \right) \right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{b_k}{z-k\pi} + \frac{b_{-k}}{z+k\pi} + \frac{b_k}{k\pi} + \frac{b_{-k}}{-k\pi} \right) + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{b_k'}{z-k\pi i} + \frac{b_{-k}'}{z+k\pi i} + \frac{b_k'}{k\pi i} + \frac{b_{-k}'}{-k\pi i} \right) \right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \left(b_k \left(\frac{1}{z-k\pi} - \frac{1}{z+k\pi} \right) + \frac{2b_k}{k\pi} + b_k' \left(\frac{1}{z-k\pi i} - \frac{1}{z+k\pi i} \right) + \frac{2b_k'}{k\pi i} \right) \right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{(-1)^k}{\operatorname{sh} k\pi} \cdot \frac{2k\pi}{z^2 - k^2\pi^2} + \cancel{\frac{2(-1)^k}{\operatorname{sh} k\pi \, k\pi}} + \frac{(-1)^k(-i)}{\operatorname{sh} k\pi} \cdot \frac{2k\pi i}{z^2 + k^2\pi^2} + \cancel{\frac{2(-1)^k}{i \operatorname{sh} k\pi \cdot k\pi i}} \right) \right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\operatorname{sh} n\pi} \left(\frac{2n\pi}{z^2 - n^2\pi^2} + \frac{2n\pi}{z^2 + n^2\pi^2} \right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\operatorname{sh} n\pi} \frac{2n\pi \cdot 2z^2}{z^4 - n^4\pi^4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 4n\pi z^2}{\operatorname{sh} n\pi \left(z^4 - n^4\pi^4 \right)}$$

(*) $|z| = r_k = (k+\frac{1}{2})\pi$

$|\sin z|^2 = \sin^2 x + sh^2 y$

$sh\, z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = \frac{e^{x+iy} - e^{-x-iy}}{2} = \frac{(e^x - e^{-x})\cos y + i(e^x + e^{-x})\sin y}{2} = sh x \cos y + i \sin y\, ch x$

$|sh\, z|^2 = sh^2 x \cos^2 y + \sin^2 y \underbrace{ch^2 x}_{= 1+sh^2 x} = \sin^2 y + sh^2 x$

$|\sin z|^2 |sh\, z|^2 = (\sin^2 x + sh^2 y)(\sin^2 y + sh^2 x)$

проблем је само ограничити у околини 0

Ако $x \in (-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$ онда је $|y| \geq y_k$, $y_k = \sqrt{(k\pi + \frac{\pi}{2})^2 - (\frac{\pi}{4})^2} \geq \sqrt{\frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi^2}{16}} = \frac{\pi\sqrt{3}}{4}$

$\forall k \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \quad |\sin z|^2 |sh\, z|^2 \geq sh^2 \frac{\pi\sqrt{3}}{4} \cdot \sin^2 \frac{\pi\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{M'^2}$

$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{|\sin z||sh\, z|} \leq M'}$

Ако $y \in (-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$ добијамо аналогно.

Ако $x, y \notin (-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$ онда је $sh^2 y \geq sh^2 \frac{\pi}{4}$ и $sh^2 x \geq sh^2 \frac{\pi}{4}$

па је $\frac{1}{|\sin z||sh\, z|} \leq \frac{1}{(sh\frac{\pi}{4})^2} = M''$

$\frac{1}{|z|^2} \leq 1$ на $|z| = r_k$, $\max\{M', M''\} = M$

$\Rightarrow \quad |f(z)| \leq M + 1$ на $|z| = r_k$ за све $k \in \mathbb{N}$