Мала и велика Пикарова теорема

① Нека је f цела неконстантна функција. Доказати да је $f(\mathbb{C})$ густ у $\mathbb{C}$.

апс: $\exists D(z_0,r)\ \ f(\mathbb{C})\cap D(z_0,r)=\emptyset$

$$\Rightarrow (\forall z\in\mathbb{C})\ |f(z)-z_0|\geq r>0$$

$$\Rightarrow (\forall z\in\mathbb{C})\ \frac{1}{|f(z)-z_0|}\leq\frac{1}{r}$$

Ако дефинишемо $g(z)=\dfrac{1}{f(z)-z_0}$ добијамо целу фју која је ограничена са $\frac{1}{r}$

$$\underset{\text{Лиувилова т}}{\Rightarrow}\quad g=\text{const.}\ \Rightarrow\ f=\text{const.}\ \ \lightning$$

Дакле, пп. није добра, па је $f(\mathbb{C})$ густ у $\mathbb{C}$.

(Т1) Мала Пикарова теорема (МПТ)

$$\left.\begin{array}{l} f\in H(\mathbb{C}) \\ f\neq\text{const.}\end{array}\right\}\Rightarrow |\mathbb{C}\setminus f(\mathbb{C})|\leq 1$$

(тј. скуп $\mathbb{C}\setminus f(\mathbb{C})$ је или празан или једночлан)

$(f(\mathbb{C})=\mathbb{C}$ или $f(\mathbb{C})=\mathbb{C}\setminus\{a\})$

② Нека је f цела неконстантна фја и $f(z)=-f(-z)\ \forall z\in\mathbb{C}$. Доказати да је $f(\mathbb{C})=\mathbb{C}$.

МПТ $\Rightarrow f(\mathbb{C})=\mathbb{C}$ или $f(\mathbb{C})=\mathbb{C}\setminus\{a\}$.

Ако би било $f(\mathbb{C})=\mathbb{C}\setminus\{a\}$ тј. $f(z)\neq a\ \forall z\in\mathbb{C}$ онда:

због $f(0)=-f(0)$ је $f(0)=0$, па $a\neq 0$

због $f(z)\neq a$ је $-f(-z)\neq a$ тј. $f(-z)\neq -a\ \forall z\in\mathbb{C}$

па следи $-a\notin f(\mathbb{C})$. Али пошто $a\neq 0$, то је $a\neq -a$

па је $f(\mathbb{C})\subseteq\mathbb{C}\setminus\{a,-a\}$ што је у контрадикцији са МПТ.

$$\Rightarrow \boxed{f(\mathbb{C})=\mathbb{C}}$$

③ Доказати да су све целе, 1-1 фје линеарне, тј. облика $f(z)=az+b$

МПТ $\Rightarrow$ $f(\mathbb{C})=\mathbb{C}$ или $f(\mathbb{C})=\mathbb{C}\setminus\{a\}$. $a,b\in\mathbb{C},\ a\neq 0$.

Ако је $f(\mathbb{C})=\mathbb{C}$ онда је f бијекција, па на основу задатка са неког од претходних часова, важи да је f линеарна.

Покажимо да не може да се деси $f(\mathbb{C})=\mathbb{C}\setminus\{a\}$.

$f:\mathbb{C}\xrightarrow[\text{на}]{1-1}\mathbb{C}\setminus\{a\}$ $\quad f^{-1}:\mathbb{C}\setminus\{a\}\to\mathbb{C}$ је холоморфна

$\Rightarrow$ $\mathbb{C}\simeq\mathbb{C}\setminus\{a\}$ $\quad$ f је холоморфизам

Али $\mathbb{C}\setminus\{a\}$ није просто повезан, а $\mathbb{C}$ јесте

↯

$\Rightarrow f(\mathbb{C})\neq\mathbb{C}\setminus\{a\}$

тј. $f(\mathbb{C})=\mathbb{C}$.

④ Нека су f и g целе функције тд. важи
$e^{f(z)}+e^{g(z)}=1\ \ \forall z\in\mathbb{C}$. Показати да је тада
$f=\text{const}$ $\quad g=\text{const}$.

$e^{f(z)}+e^{g(z)}=1\ \ \forall z\in\mathbb{C}$

$h(w)=e^{w}$, $h(\mathbb{C})=\mathbb{C}\setminus\{0\}$, h је цела неконстантна фја

$e^{f(z)}\neq 0\ \ \forall z\in\mathbb{C} \Rightarrow e^{g(z)}\neq 1\ \ \forall z\in\mathbb{C}$

$\Rightarrow g(z)\neq 2n\pi i,\ n\in\mathbb{N}$

Фја g је цела и испушта више од 1 вредности

$\underset{\text{МПТ}}{\Rightarrow} g=\text{const.} \Rightarrow e^{f(z)}=\text{const.}\ /'$

$f'(z)e^{f(z)}=0 \Rightarrow f'=0$

$\Rightarrow f=\text{const.}$

⑤ Нека је f цела и неконстантна функција. Показати да је
$$(f^3+f^2)(\mathbb{C})=\mathbb{C}.$$

f цела и неконстантна $\underset{МПТ}{\Rightarrow}$ $f(\mathbb{C})=\mathbb{C}$ или $f(\mathbb{C})=\mathbb{C}\setminus\{\zeta_0\}$ ⊛

f^3+f^2 цела и неконстантна $\overset{МПТ}{\Rightarrow}$ $(f^3+f^2)(\mathbb{C})=\mathbb{C}$ или $(f^3+f^2)(\mathbb{C})=\mathbb{C}\setminus\{a\}$.

<u>пп</u>: $(f^3+f^2)(\mathbb{C})\neq\mathbb{C}$, онда је $(f^3+f^2)(\mathbb{C})=\mathbb{C}\setminus\{a\}$

$$f^3(z)+f^2(z)\neq a \quad \forall z\in\mathbb{C}$$

Једначина $\zeta^3+\zeta^2=a$ има 3 корена у $\mathbb{C}$ ζ_1,ζ_2,ζ_3

Ако су нека два од њих различита, онда би f испуштала бар 2 вредности, а то је у контрадикцији са ⊛

$\Rightarrow$ $\zeta_1=\zeta_2=\zeta_3=\zeta_0$

$$g(\zeta)=\zeta^3+\zeta^2-a=(\zeta-\zeta_0)^3 \quad и \quad f(z)\neq\zeta_0$$

$$g'(\zeta)=3\zeta^2+2\zeta=3(\zeta-\zeta_0)^2, \text{ а је } g'(\zeta_0)=0 \text{ тј. } 3\zeta_0^2+2\zeta_0=0 \quad (1)$$

$$g''(\zeta)=6\zeta+2=6(\zeta-\zeta_0), \text{ па је } g''(\zeta_0)=0 \text{ тј. } 6\zeta_0+2=0 \quad (2)$$

$\Rightarrow$ $\zeta_0=\frac{-1}{3}$ из (2)

кад убацимо у (1): $3\left(\frac{-1}{3}\right)^2+2\cdot\left(\frac{-1}{3}\right)=0$

$$3\cdot\frac{1}{9}-\frac{2}{3}=0$$

$$-\frac{1}{3}=0 \quad ↯$$

Дакле, не важи пп!

$$\Rightarrow \boxed{(f^3+f^2)(\mathbb{C})=\mathbb{C}}$$

Велика Пикарова теорема (ВПТ)

$f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f \in H(\mathring{U})$, $\mathring{U}$ пробушена околина есенцијалног сингуларитета $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ ~~ф~~је f $(\mathring{U} = U(z_0) \setminus \{z_0\})$

Тада f на околини $\mathring{U}$ узима <u>све</u> вредности из $\mathbb{C}$ осим евентуално 1 и то сваку бесконачно много пута.

⑥ Доказати да из ВПТ следи МПТ.

<u>Пп</u>: f цела и неконстантна

постоје 3 могућности:

1) $\lim_{z \to \infty} f(z) = a \in \mathbb{C} \Rightarrow f$ је ограничена и цела $\underset{\text{Лиувил}}{\Rightarrow} f = \text{const.}$ ↯

2) $\lim_{z \to \infty} f(z) = \infty \Rightarrow f$ је полином (доказали смо)

$\Rightarrow f(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$ (на основу основне теореме алгебре)

$\left(\begin{array}{l} f(z) = w \text{ има } n \text{ решења чак } \forall w \in \mathbb{C} \\ \deg f = n \end{array} \right)$

3) $\lim_{z \to \infty} f(z)$ не постоји, тј. ∞ је есенцијални сингуларитет

$\underset{\text{ВПТ}}{\Rightarrow} |\mathbb{C} \setminus f(\mathbb{C})| \leq 1$

⑦ Нека је f цела фја и $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq b$ тд. су скупови $f^{-1}(\{a\})$ и $f^{-1}(\{b\})$ непразни и коначни.

Доказати да је f полином.

$f^{-1}(\{a\}) = \{z \in \mathbb{C} : f(z) = a\} \neq \emptyset$

$f^{-1}(\{b\}) = \{z \in \mathbb{C} : f(z) = b\} \neq \emptyset$

дакле, f узима бар 2 вредности a и b, $a \neq b$

Разматрамо као у претходном задатку:

1) Ако је $\lim_{z \to \infty} f(z) = a$, f је константна ↯

2) Ако је $\lim_{z \to \infty} f(z) = \infty \Rightarrow f$ је полином ✓

3) Ако је $\lim_{z \to \infty} f(z)$ не постоји онда из ВПТ постоји бесконачно много тачака које се сликају у a и b ↯

Дакле, једина могућност је да је f полином.

Митаг-Лефлерова теорема

Теорема 1: $a_1, a_2, a_3, \dots$ прости полови ф-је f у $\mathbb{C}$ уређени тд. је $0<|a_1|\le|a_2|\le\dots$ са остацима $\operatorname*{Res}_{z=a_k} f(z) = b_k$ $(k=1,2,\dots)$

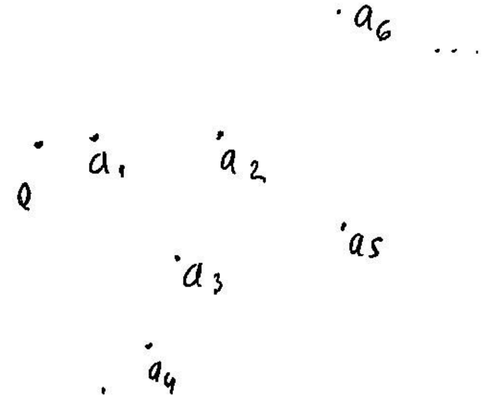
(f мероморфна - има само полове од сингуларитета)

Нека су Γ_k кругови полупречника r_k тд. не пролазе ни кроз један пол ф-је f и да је $|f(z)|\le M$ за $z\in\Gamma_k, k=1,2,\dots,$ где је $M>0$ независан од k и $r_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} +\infty$.

Под наведеним ус. Митаг-Лефлеров развој има облик

$$f(z) = f(0) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k\left(\frac{1}{z-a_k} + \frac{1}{a_k}\right) \quad \text{за све } z \neq a_k \quad (k=1,2,\dots)$$

Овај ред је равномерно конвергентан у сваком диску у коме је f аналитичка ф-ја.



f нема пол у 0!

(1) Развити ф-ју $f(z) = \operatorname{ctg} z$ у Митаг-Лефлеров развој.

$f(z) = \frac{\cos z}{\sin z}$ има полове у тачкама $k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$

за примену Т1 нам је потребна ф-ја која нема пол у 0

узмимо ф-ју $g(z) = f(z) - \frac{1}{z} = \frac{\cos z}{\sin z} - \frac{1}{z} = \frac{z\cos z - \sin z}{z\sin z}$

$$\lim_{z\to 0} \frac{z\cos z - \sin z}{z\sin z} = \lim_{z\to 0} \frac{z\left(1-\frac{z^2}{2}+o(z^2)\right) - \left(z - \frac{z^3}{6} + o(z^3)\right)}{z\left(z - \frac{z^3}{6} + o(z^3)\right)}$$

$$= 0$$

$z=0$ је отклоњив сингуларитет ф-је g

$$g(z)=\begin{cases} f(z)-\frac{1}{z}, & z\neq 0 \\ 0, & z=0 \end{cases}$$

има полове у тачкама $z_k = k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$. (прости полови)

$$b_k = \operatorname*{Res}_{z=z_k} g(z) = \lim_{z\to z_k} (z-z_k)g(z)$$

$$= \lim_{z\to z_k} (z-z_k)\frac{z\cos z-\sin z}{z\sin z}$$

$$= \frac{z_k\cos z_k - \sin z_k}{z_k}\cdot\frac{1}{\cos z_k} = \frac{k\pi\cdot(-1)^k - \overset{0}{\sin k\pi}}{k\pi\cancel{\cos k\pi}} = 1$$

g је ограничена на круговима $|z| = r_k = (k+\frac{1}{2})\pi$