

Геометријска теорија функција
28.09.2021.

1. Нека је $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ конвергентан на $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ и $b_n \geq 0$. Доказати да је фамилија $\mathfrak{F} = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n : |a_n| \leq b_n \right\}$ нормална на \mathbb{D} .

2. Нека је $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ и $h > 0$. Показати да пресликавање

$$f(z) = \frac{\operatorname{Re} z}{\cos \alpha} + i(\operatorname{Im} z - \operatorname{Re} z \operatorname{tg} \alpha)$$

квазиконформно слика косу полутраку

$$S_1 = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0, \operatorname{Re} z \operatorname{tg} \alpha < \operatorname{Im} z < \operatorname{Re} z \operatorname{tg} \alpha + h\}$$

на полутраку $S_2 = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0, 0 < \operatorname{Im} z < h\}$. Одредити константу квазиконформности.

3. Нека је $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |z-1| > 2, |z+1| < 5, \operatorname{Im} z > 0\}$ и Γ фамилија кривих које спајају дужи $[-6, -1]$ и $[3, 4]$ унутар Ω . Наћи екстремалну дужину фамилије Γ тј. $\lambda(\Gamma)$ и оптимално ρ , тј. ρ за које се достиже та екстремална дужина.

4. Користећи позната својства функције μ доказати да је квадрилатерал $Q = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$ са истакнутим тачкама z_1, z_2, z_3, ∞ редом на граници (на реалној правој) конформно еквивалентан квадрату акко је $z_3 - z_2 = z_2 - z_1$.