**Геометријска теорија функција**
**5.јул 2021.**

1. Нека је $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ , $\mathfrak{F} = \{f : \mathbb{D} \to \mathbb{C} : f$ холоморфна, $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(f) z^n\}$ и $K_n = \sup\limits_{f \in \mathfrak{F}} |c_n(f)|$. Доказати да је фамилија $\mathfrak{F}$ нормална акко је $\limsup\limits_{n\to\infty} K_n^{\frac{1}{n}} \leq 1$.

2. Нека је $f(z) = \sqrt{x^2+y^2} + i \arctan \frac{y}{x}$, где је $z = x + iy$. Одредити највећи скуп $\Omega$ у $\mathbb{C}$ на коме је $f$ дифеоморфизам, наћи кодомен и испитати квазиконформност пресликавања $f$ на $\Omega$.

3. Нека је $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0, \operatorname{Im} z > 0\} \setminus \{z \in \mathbb{C} : |z - \frac{5}{4}| \leq 1\}$ и $\Gamma$ фамилија кривих које спајају $[0, \frac{1}{4}]$ и $[\frac{9}{4}, \infty)$ унутар $\Omega$. Наћи екстремалну дужину фамилије $\Gamma$ тј.$\lambda(\Gamma)$ и оптимално $\rho$, тј. $\rho$ за које се достиже та екстремална дужина.

4. Нека је $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ и $A = \{e^{i\theta} : -\theta_0 < \theta < \theta_0\}$ лук на граници диска, за неко $\theta_0 \in [0, \pi)$. Нека је $\Gamma$ фамилија кривих унутар $\mathbb{D}$ које раздвајају скуп $\partial\mathbb{D} \setminus A$ од тачке 0.

   **а)** Показати да је $\lambda(\Gamma) = 2\lambda(\Gamma_1)$, где је $\Gamma_1$ фамилија кривих у горњем полудиску $\mathbb{D}^+ = \{z \in \mathbb{D} : \operatorname{Im} z > 0\}$ која спаја дуж $[-1, 0]$ и скуп $A^+ = \mathbb{D}^+ \cap A$.

   б) Одредити $k \in \mathbb{R}$ тако да је квадрилатерал који се састоји из скупа $\mathbb{D}^+$ и истакнутих тачака $\infty, 0, \cos\theta_0, 1$ конформно еквивалентан квадрилатералу $\mathbb{H}(-\frac{1}{k}, -1, 1, \frac{1}{k})$, где је $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$ горња полураван.
   Извести из тога да је $\lambda(\Gamma) = 4\frac{K(k)}{K'(k)}$, где је

   $K(k) = \int\limits_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(1-k^2\xi^2)}}$, а $K'(k) = -i \int\limits_1^{\frac{1}{k}} \frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(1-k^2\xi^2)}}$.