Геометријска теорија функција
30.јун 2021.

1. Нека је $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ област и $\mathfrak{F} \subseteq H(\Omega)$, где је $H(\Omega)$ скуп свих холоморфних функција на области Ω. Ако је фамилија $\mathfrak{F}$ нормална и $n \in \mathbb{N}$ произвољан природан број, доказати да је фамилија $\mathfrak{F}^{(n)} = \{f^{(n)} : f \in \mathfrak{F}\}$ такође нормална.

2. Нека је $K \geq 1$ и $f(z) = z + i\sqrt{\frac{K-1}{K+1}}\bar{z}$. Показати да је пресликавање f $(K + \sqrt{K^2 - 1})$-квазиконформно и да неједнакост
$$\frac{M(R)}{K} \leq M(f(R)) \leq KM(R),$$
важи за све правоугаонике $R = [a, b] \times [c, d]$, где су a, b, c и d реални бројеви и $M(R)$ је модул правоугаоника R.

3. Нека је $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1, |z - \frac{1}{4}| > \frac{1}{4}, \operatorname{Im} z > 0\}$ и Γ фамилија кривих које спајају дужи $[-1, 0]$ и $[\frac{1}{2}, 1]$ унутар Ω. Наћи екстремалну дужину фамилије Γ тј.$\lambda(\Gamma)$ и оптимално ρ, тј. ρ за које се достиже та екстремална дужина.

4. Нека је $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ просто повезан домен чија је граница Жорданова крива, са три истакнуте тачке на граници. Истакнуте тачке зовемо врхови, а лукове између њих странице овог "троугла". Нека је γ непрекидна крива у $\overline{\Omega}$ која додирује све три странице овог "троугла". Користећи екстремалну дужину, показати да је
$$L(\gamma) \leq 3^{\frac{1}{4}}\sqrt{A(\Omega)},$$
где је $L(\gamma)$ еуклидска дужина криве γ, а $A(\Omega)$ површина области Ω. Показати да је константа $3^{\frac{1}{4}}$ најбоља могућа.