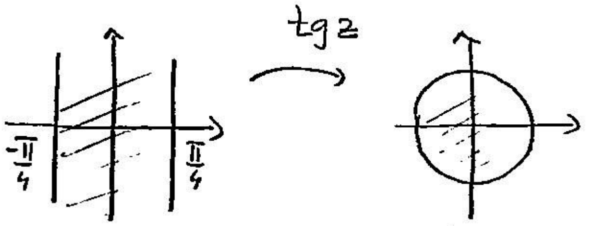
$\boxed{11.\ \text{двочас}}$

(наставак: конформна пр.)

Показали смо на неком од претходних часова:



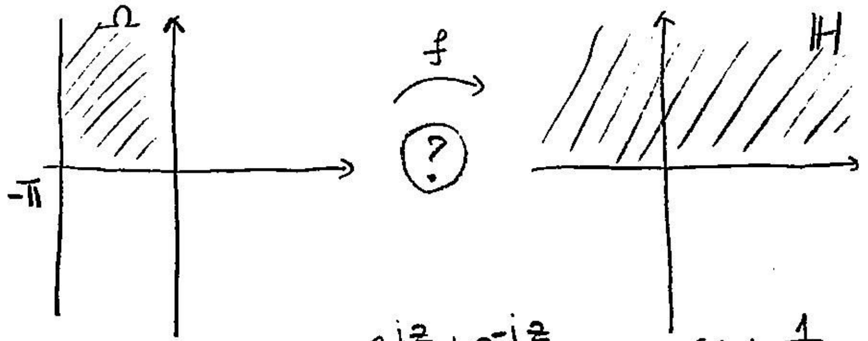

$\operatorname{tg} z$ слика $\{z \in \mathbb{C} : -\frac{\pi}{4} < \operatorname{Re} z < \frac{\pi}{4}\}$ на $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$

ово је конформно пресликавање

(холоморфно је, бијекција)

– поновите градиво КАА – билинеарна пр, $z^2$, фја Жуковског, $e^z$

① Доказати да фја $f(z) = \cos z$ конформно пресликава област $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : -\pi < \operatorname{Re} z < 0, \operatorname{Im} z > 0\}$ на горњу полураван $\mathbb{H} = \{w \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} w > 0\}$.

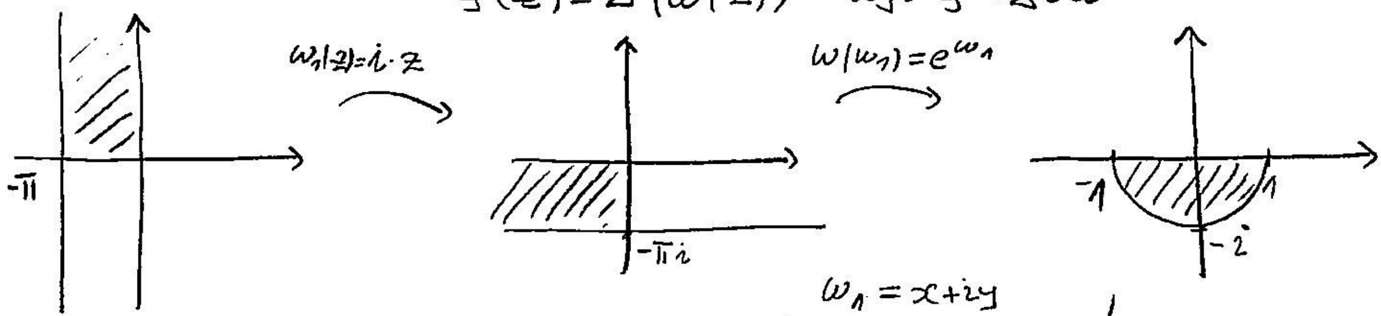



$$f(z) = \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \frac{w + \frac{1}{w}}{2} \quad \text{за } w = e^{iz}$$

$$w(z) = e^{iz}$$

фја Жуковског $\Delta(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$

$f(z) = \Delta(w(z))$ тј. $f = \Delta \circ w$

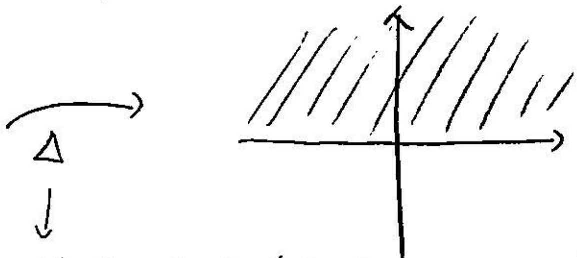



$w_1 = x + iy$

$e^{w_1} = e^x \cdot e^{iy}$

$x \in (-\infty, 0)$

$y \in (-\pi, 0)$




фја Жуковског (ово познато из КАА)

② Доказати да ф-ја $f(z)=\sin z$ конформно пресликава област
$\Omega=\{z\in\mathbb{C}: -\frac{\pi}{2}<\operatorname{Re} z<\frac{\pi}{2}, \operatorname{Im} z>0\}$ на горњу полураван
$H=\{w\in\mathbb{C}: \operatorname{Im} w>0\}$

I начин
$$\sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}=\frac{w-\frac{1}{w}}{2i}=\underbrace{\frac{1}{i}}_{=-i}\cdot\frac{w-\frac{1}{w}}{2}, \quad w=e^{iz}$$

$$\frac{w-\frac{1}{w}}{2}=a\cdot\Delta(bw)$$ хоћемо да је изразимо преко ф-је Жуковског

$$\frac{w-\frac{1}{w}}{2}=a\cdot\frac{bw+\frac{1}{bw}}{2}$$

$$w-\frac{1}{w}=abw+\frac{a}{bw}$$

$$ab=1,\quad \frac{a}{b}=-1 \quad a=-b$$

$$\Rightarrow -b^2=1$$
$$b^2=-1 \quad b=i \text{ нпр.}$$

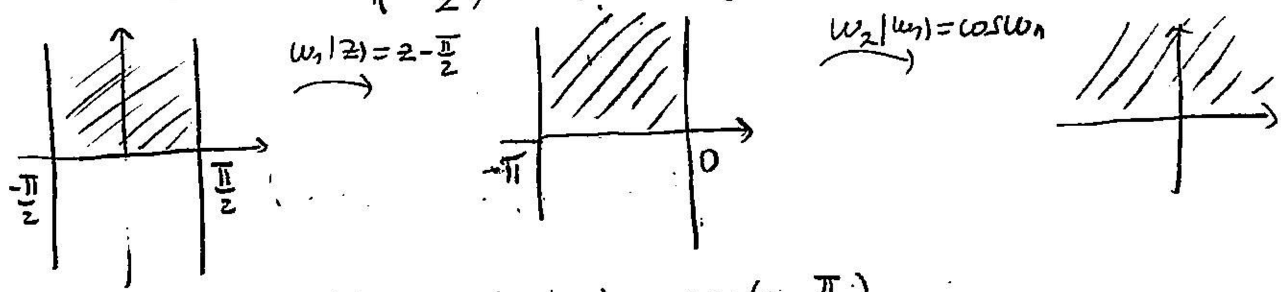
$$\frac{w-\frac{1}{w}}{2}=-i\cdot\Delta(iw)$$ (и ово рађено на КА А?)

$$\boxed{\sin z=-\Delta(i w(z))}$$ и онда пресликавамо!

завршити за домаћи!

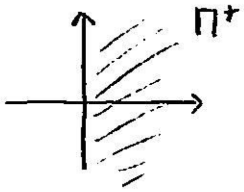
II начин: користимо претходни задатак

$\sin z=\cos\left(z-\frac{\pi}{2}\right)$ (важе адиционе формуле – проверите!)




$$f(z)=w_2(w_1(z))=\cos\left(z-\frac{\pi}{2}\right)$$

③ функцијом $f(z)=\mathrm{Ln}(z+\sqrt{z^2+1})$ одређеној са $f(0)=i\pi$ (грана фје $\ln(z+\sqrt{z^2+1})$ одређена са $f(0)=i\pi$), пресликати област $\Pi^+=\{z\in\mathbb{C} : \mathrm{Re}\, z>0\}$.




$$f(z)=\mathrm{Ln}(z+\sqrt{z^2+1}),\quad f(0)=i\pi$$

$$e^{f(z)}=z+\sqrt{z^2+1},\quad e^{f(0)}=e^{i\pi}=-1$$

$$u(z)=e^{f(z)},\quad u(z)-z=\sqrt{z^2+1},\quad u(0)=-1$$

$$(u(z)-z)^2=z^2+1$$

$$u^2(z)-2u(z)z+\cancel{z^2}=\cancel{z^2}+1$$

$$u^2(z)-2u(z)z-1=0$$

$$2u(z)z=u^2(z)-1$$

$$z=\frac{u^2(z)-1}{2u(z)}=\frac{1}{2}\left(u(z)-\frac{1}{u(z)}\right)$$

инверзна фја за $f$ је дакле $z=f^{-1}(\omega)=\dfrac{e^{\omega}-e^{-\omega}}{2}=\mathrm{sh}\,\omega$

(треба пазити на домен, о томе тек касније)

$u(z)=e^{\omega}$
$\omega=f(z)$

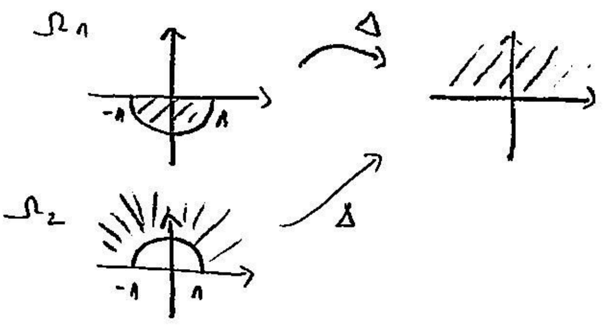
$$f^{-1}(\omega)=\underbrace{-i}_{\text{ротација за } -\frac{\pi}{2}}\Delta(\overbrace{ie^{\omega}}^{\text{ротација за } \frac{\pi}{2}})\quad \text{(као у претходном зад.)}$$

Треба наћи област која се са $f^{-1}$ слика на $\Pi^+$ тј која се са $\Delta(ie^{\omega})$ слика на $\mathbb{H}$

Познато нам је: $\Delta$ слика $\Omega_1=\{z\in\mathbb{C} : |z|<1,\ \mathrm{Im}\, z<0\}$ на $\mathbb{H}$

и $\Omega_2=\{z\in\mathbb{C} : |z|>1,\ \mathrm{Im}\, z>0\}$ на $\mathbb{H}$

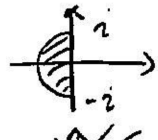
Сада треба наћи област која се са $ie^{\omega}$ слика на $\Omega_1$, односно на $\Omega_2$.



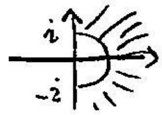

$-i\cdot\Omega_1=\Omega_1'$ $\qquad -i=\frac{1}{i}$

$-i\cdot\Omega_2=\Omega_2'$

$\Omega_1'$ :

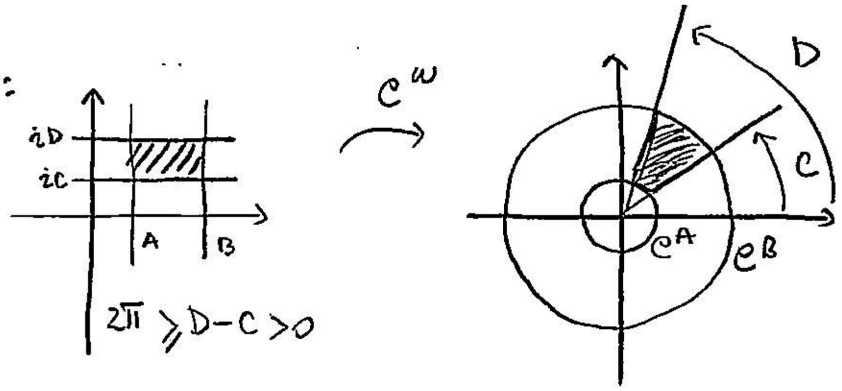



$\Omega_2'$ :



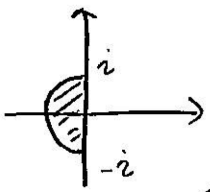
Остаје само да се нађе област која се са $e^w$ слика на $\Omega_1'$, односно на $\Omega_2'$.

Познато:




$e^w$ је на $[A,B]\times[C,D]$ за $D-C\in(0,2\pi]$ бијекција

$\Omega_1'$:

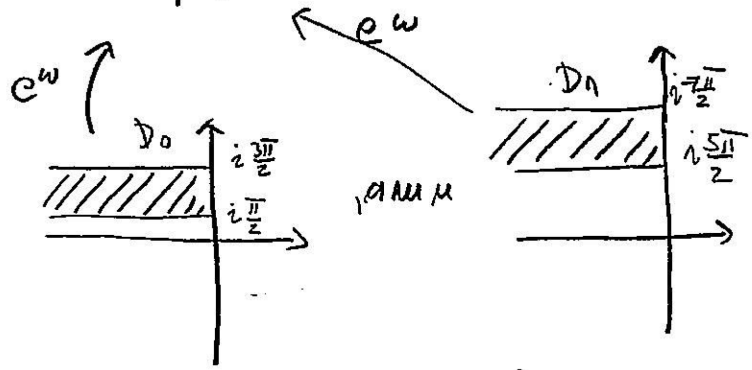



$e^A=0$, $e^B=1$ $\qquad C=\frac{\pi}{2}$, $D=\frac{3\pi}{2}$

$A=-\infty$, $B=0$ $\qquad$ (односно $C=\frac{\pi}{2}+2k\pi$

$D=\frac{3\pi}{2}+2k\pi$

$k\in\mathbb{Z}$)

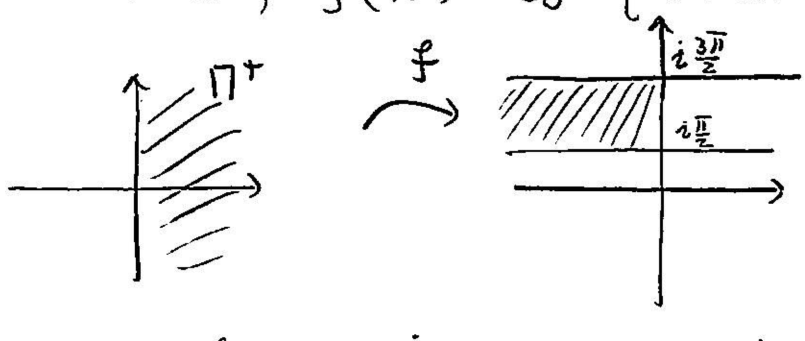



итд.

$D_k=\left\{w\in\mathbb{C}:\ \mathrm{Re}\,w<0,\ \frac{\pi}{2}+2k\pi<\mathrm{Im}\,w<\frac{3\pi}{2}+2k\pi\right\}$

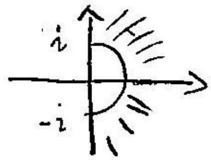
$i\pi$ мора да припада $\overline{D_k}$, па је стога $k=0$! (због одабира гране)

Дакле, $f(\Pi^+)=D_0=\left\{w\in\mathbb{C}:\ \mathrm{Re}\,w<0,\ \frac{\pi}{2}<\mathrm{Im}\,w<\frac{3\pi}{2}\right\}$



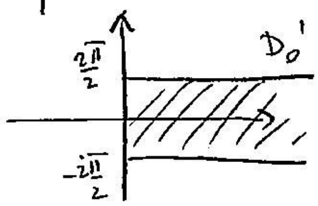

Слика је једнозначно одређена, па не морамо ни рачунати за $\Omega_2'$! (али хоћемо, ради вежбе)

$\Omega_2^{v}$:

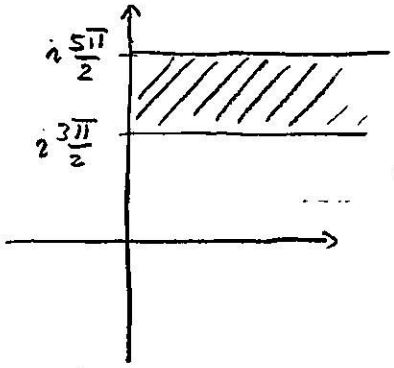


$e^A=1$; $e^B=\infty$, $C=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$, $D=\frac{\pi}{2}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$

$e^w$



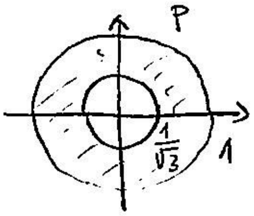
али и



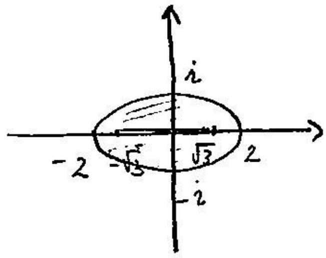
итд.

јасно је да $i\pi\notin\overline{D_k'}$ ни за једно $k\in\mathbb{Z}$! $\left(D_k'=\{w\in\mathbb{C}: \operatorname{Re} w>0,\ -\frac{\pi}{2}+2k\pi<\operatorname{Im} w<\frac{\pi}{2}+2k\pi\}\right)$

(4) Доказати да се пресликавањем $w(z)=\frac{3z^2+1}{2z}$ прстен $P=\{z\in\mathbb{C}: \frac{1}{\sqrt3}<|z|<1\}$ конформно пресликава на унутрашњост елипсе дате формулом $u^2+4v^2=4$ (у $O_{uv}$ равни, $w=u+iv$) са засеком дуж $x$ осе између жижа.



$w$



$\left(\frac{u}{2}\right)^2+v^2=1$

полуосе $a=2$; $b=1$

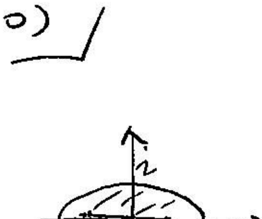
$c=\sqrt3$, жиже $(\sqrt3,0)$ и $(-\sqrt3,0)$

$$w(z)=\frac{3z^2+1}{2z}=\frac{3z}{2}+\frac{1}{2z}=a\,\Delta(bz)$$

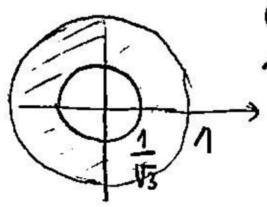
$$=a\cdot\left(bz+\frac{1}{bz}\right)\cdot\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow\ 3=ab,\ 1=\frac{a}{b}$$

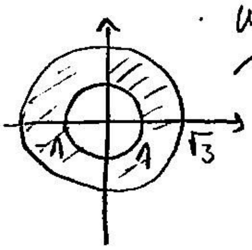
$$b=a=\sqrt3$$



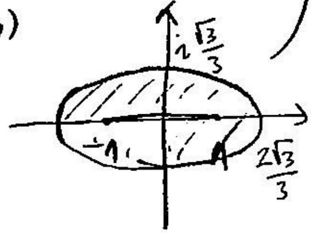
$$w(z)=\sqrt3\,\Delta(\sqrt3\,z)$$



$w_1(z)=\sqrt3 z$



$w_2(w_1)=\Delta(w_1)$



$\cdot\sqrt3$

кружница пол. $\sqrt3$ се слика у елипсу са полуосама $\left(\sqrt3+\frac{1}{\sqrt3}\right)\cdot\frac12=\frac{\sqrt3}{2}\cdot\frac43=\frac{2\sqrt3}{3}$ и $\left(\sqrt3-\frac{1}{\sqrt3}\right)\frac12=\frac{\sqrt3}{3}$