④ Одредити највећи диск са центром у 0 тако да је $f(z)=e^z$ 1-1 у том диску.

$f(z_1)=f(z_2) \iff e^{z_1}=e^{z_2}$

$\iff e^{z_1-z_2}=1$

$\iff z_1-z_2=2k\pi i\ ,\ k\in\mathbb{Z}$

$\boxed{\text{за } k=0 \text{ је } z_1=z_2 \text{ тј. } f \text{ је 1-1; иначе није}}$

За $k\neq 0$: $|z_1-z_2|=|k|2\pi \geq 2\pi \quad (|k|\geq 1)$

$2\pi \leq |z_1-z_2| \leq |z_1|+|z_2|$

за $z_1,z_2\in D(0,\pi)$ је $|z_1|+|z_2|<\pi\cdot 2$

па је у том случају $2\pi<2\pi$ ↯

$\Rightarrow$ за $z_1,z_2\in D(0,\pi)$ је $k=0$, тј. f је 1-1.

Да ли је f 1-1 на $D(0,\pi+2\varepsilon)$?

$z_1,z_2\in D(0,\pi+2\varepsilon)$

$z_1=i(\pi+\varepsilon)\ ,\ z_2=i(-\pi+\varepsilon)$

$z_1-z_2=2i\pi\neq 0$, а важи $f(z_1)=f(z_2)$!

$\Rightarrow f$ није 1-1 на $D(0,\pi+2\varepsilon)$ ни за једно $\varepsilon>0$.

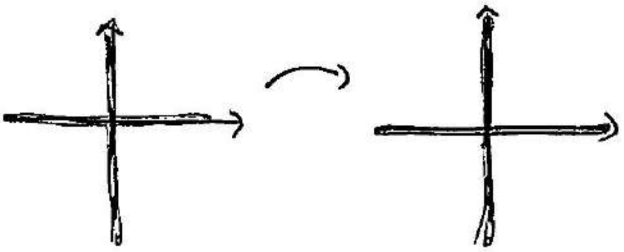
Дакле, максималан диск је $D(0,\pi)$!

$\mathbb{H} = \{z\in\mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$

(5) Нека је f ограничена на $\overline{\mathbb{H}}$, непрекидна на $\overline{\mathbb{H}}$ и холоморфна на $\mathbb{H}$. Ако је $f(x)\in\mathbb{R}$ за све $x\in\mathbb{R}$, доказати да је f константна.

На основу Шварцовог принципа симетрије можемо проширити f до аналитичке ф-је на $\mathbb{C}$, па због $f(\bar z)=\overline{f(z)}$ и нова ф-ја ће бити ограничена. Стога $\left(|f(\bar z)|=|\overline{f(z)}|=|f(z)|\right)$ на основу Лиувилове теореме добијамо да је f константна (цела и ограничена $\Rightarrow$ const.)

(6) Нека је f цела функција т.д. је $f(x)\in\mathbb{R}, \forall x\in\mathbb{R}$ и $f(iy)$ припада имагинарној оси тј. $\operatorname{Re} f(iy)=0$. Доказати да је f непарна ф-ја тј. $f(z)=-f(-z)$ за све $z\in\mathbb{C}$.



Ако посматрамо $g=f|_{\overline{\mathbb{H}}}$ тада је g хол. на $\mathbb{H}$ и g је непр. на $\overline{\mathbb{H}}$, $g(x)\in\mathbb{R}$ $\forall x\in\mathbb{R}$, па се на основу Шварцовог пр. симетрије g може проширити до целе ф-је. Пошто је $f=g$ на $\overline{\mathbb{H}}$, на основу теореме јединости је $f=g$ у $\mathbb{C}$! На основу ШПС важи $g(\bar z)=\overline{g(z)}$, па је то онда испуњено и за f!

Дакле, $f(\bar z)=\overline{f(z)}$.

$f(x-iy)=\overline{f(x+iy)}$

$u(x-iy)+iv(x-iy)=$

$\quad u(x+iy)-iv(x+iy)$

$\Rightarrow u(x-iy)=u(x+iy)$

$\quad v(x-iy)=-v(x+iy)$

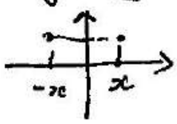
$$f(-z)=f(-x-iy)=u(-x-iy)+iv(-x-iy)$$
$$=u(-x+iy)+i\cdot(-1)v(-x+iy)$$
$$\underset{?}{=}-u(x+iy)+i\cdot(-v(x+iy))$$

$$\left.\begin{aligned}u(x+iy)&=-u(-x+iy)\\ v(x+iy)&=v(-x+iy)\end{aligned}\right\}\ (?)$$

$$\Pi^+ = \{ z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0 \}$$

Ако сада посматрамо $h = f|_{\overline{\Pi^+}}$, h непр. на $\overline{\Pi^+}$, хол. на Π^+
$h(iy) \in i\mathbb{R}$ $\forall y \in \mathbb{R}$, па се на основу уопштења ШПС (на све праве) добија да се h може проширити до целе фје тд.:

. . .



$x+iy$ и $-x+iy$
су симетрични
у односу на y осу

$\Rightarrow$ $h(x+iy)$ и $h(-x+iy)$ су симетрични у односу на y осу

тј. $$\left.\begin{aligned} \operatorname{Re} h(x+iy) &= -\operatorname{Re} h(-x+iy) \\ \operatorname{Im} h(x+iy) &= \operatorname{Im} h(-x+iy) \end{aligned}\right\} (*)$$

$f = h$ на Π^+, па на основу теореме јединости $f = h$ на $\mathbb{C}$
па важи (*) за f:

$$u(x+iy) = -u(-x+iy)$$
$$v(x+iy) = v(-x+iy)$$

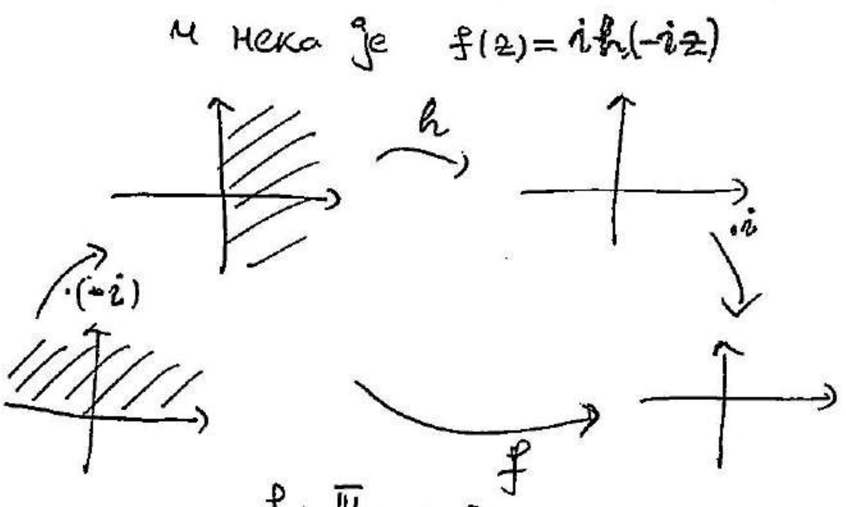
А то је управо (?)

$\Rightarrow$ $f(-z) = -f(z)$ за све $z \in \mathbb{C}$

Напомена: уопштење ШПС на y осу (скица доказа)

Нека је h тд. је непр. на $\overline{\Pi^+}$, хол. на Π^+ и $h(iy) \in i\mathbb{R}$ $\forall y \in \mathbb{R}$
и нека је $f(z) = i h(-iz)$

$h : \overline{\Pi^+} \to \mathbb{C}$



$f : \overline{\mathbb{H}} \to \Omega$

$$\left.\begin{aligned} & f(x) = \underbrace{h(-ix)}_{\in i\mathbb{R}} \cdot i \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ & f \text{ је непр на } \overline{\mathbb{H}} \\ & f \text{ је хол. на } \mathbb{H} \end{aligned}\right\} \overset{\text{ШПС}}{\Rightarrow} \begin{aligned} & f \text{ се може проширити на } \mathbb{C} \\ & f(\bar z) = \overline{f(z)} \end{aligned}$$

$f(\bar z) = \overline{f(z)} \Rightarrow i h(-i\bar z) = \overline{ih(-iz)} = -i\,\overline{h(-iz)}$

$h = u + iv, \; z = x + iy, \; \bar z = x - iy, \; -i\bar z = -ix - y$

$i \cdot h(-ix - y) = -i\,\overline{h(-ix + y)}$

$\cancel{i}(u(-ix-y) + i v(-ix-y)) = -\cancel{i}\cdot(u(-ix+y) - i v(-ix+y))$

$u(-ix-y) + i v(-ix-y) = -u(-ix+y) + i v(i(-x)+y)$

$u(-ix-y) = -u(-ix+y)$

$v(-ix-y) = v(-ix+y)$

$z \in H$

$x \in \mathbb{R}, y > 0$

$-ix \in i\mathbb{R}$

$-i(x(-i) - y) = -x + iy$

Заметим:

$y \to x$

$-x \to y$

$$\boxed{\begin{aligned} u(-x+iy) &= -u(x+iy) \\ v(x+iy) &= v(-x+iy) \end{aligned}}$$

$\forall x > 0, \; y \in \mathbb{R}$

деф1: Жорданова крива је слика кружнице хомеоморфним пресликавањем.

Теорема 1: Комплемент Жорданове криве C у равни се састоји од 2 дисјунктна домена, од којих сваки има границу C.

деф2: Жорданов домен је ограничен домен чија је граница Жорданова крива.

деф3. Хомеоморфизам $\omega : \Omega \to \Omega'$ ($\Omega, \Omega' \subseteq \mathbb{C}$) чува оријентацију ако чува оријентацију границе сваког Жордановог домена D т.д. $\overline{D} \subseteq \Omega$.

Теорема 2: Ако хомеоморфизам $\omega : \Omega \to \Omega'$ има регуларну тачку $z \in \Omega$ т.д. $J\omega(z) > 0$, тада ω чува оријентацију. Обратно, ако ω чува оријентацију онда је Јакобијан $J\omega(z) > 0$ за сваку регуларну тачку $z \in \Omega$.

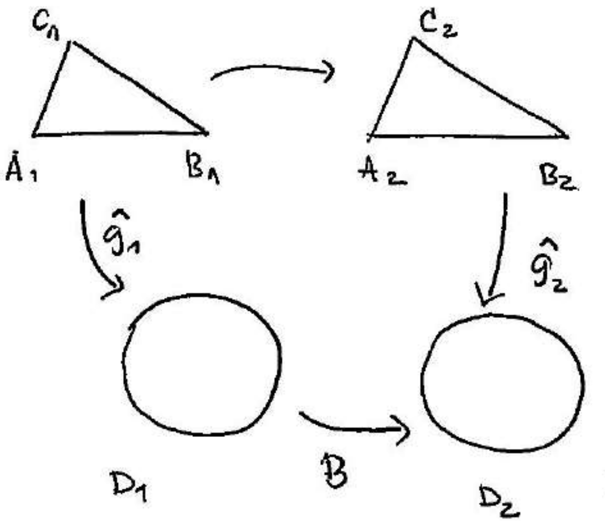
(z је регуларна тачка од ω ако је $z \in \operatorname{Int}\Omega$, ω је дифер. у z и $J\omega(z) \neq 0$)

Риманова теорема: Произвољна просто повезана област у $\overline{\mathbb{C}}$ чија граница садржи више од једне тачке, конформно је еквивалентна јединичном диску $\mathbb{D}$.

Каратеодоријева теорема: Нека су Ω и Ω' два Жорданова домена у $\mathbb{C}$ и $f : \Omega \to \Omega'$ конформно пресликавање. Тада се f може проширити до хомеоморфизма $f : \overline{\Omega} \to \overline{\Omega'}$.

* Жорданов домен је просто повезан!

① Ако су дата 2 троугла $\Delta_1 = \Delta A_1B_1C_1$ и $\Delta_2 = \Delta A_2B_2C_2$ у $\mathbb{C}$, доказати да постоји хомеоморфизам $\hat{f} : \overline{\Delta}_1 \to \overline{\Delta}_2$ тд. $\hat{f}(A_1) = A_2$, $\hat{f}(B_1) = B_2$, $\hat{f}(C_1) = C_2$ и $\hat{f}|_{\Delta_1} = f$ је конформно.



Δ_1 и Δ_2 су Жорданови домени, па су просто повезани, дакле за њих важи Риманова теорема и теорема Каратеодорија!

Риманова т. $\Rightarrow$ $\exists\, g_1$ и g_2 конформна тд. $g_1 : \Delta_1 \to \mathbb{D}$, $g_2 : \Delta_2 \to \mathbb{D}$

Каратеодори $\Rightarrow$ $\exists\, \hat{g}_1 : \overline{\Delta_1} \to \overline{\mathbb{D}}$

$\exists\, \hat{g}_2 : \overline{\Delta_2} \to \overline{\mathbb{D}}$

$\hat{g}_1$ и $\hat{g}_2$ хомеоморфизми

Нека је $z_1 = \hat{g}_1(A_1)$, $z_2 = \hat{g}_1(B_1)$, $z_3 = \hat{g}_1(C_1)$, а

$\omega_1 = \hat{g}_2(A_2)$, $\omega_2 = \hat{g}_2(B_2)$ и $\omega_3 = \hat{g}_2(C_2)$.

Означимо $\hat{g}_1(\overline{\Delta}_1) = D_1$ и $\hat{g}_2(\overline{\Delta}_2) = D_2$ $(D_1 = D_2 = \overline{\mathbb{D}})$

Постоји билинеарно пресликавање

$B : D_1 \to D_2$ тд. $B(z_1) = \omega_1$, $B(z_2) = \omega_2$, $B(z_3) = \omega_3$ (КАА)

(B слика ∂D_1 у ∂D_2, да ли слика D_1 на D_2 или на D_2^c?

Ако B мења оријентацију, можемо га додатно компон. са $\frac{1}{z}$ и добити да слика D_1 на D_2)

$\hat{f} = \hat{g}_2^{-1} \circ B \circ \hat{g}_1$ слика $\overline{\Delta}_1$ на $\overline{\Delta}_2$ и важи тражено.