Конформна пресликавања у $\mathbb{C}$

$\Omega \subseteq \mathbb{C}$ област , $\Omega_1, \Omega_2 \subseteq \mathbb{C}$ области

деф 1: $f : \Omega \to \mathbb{C}$ је конформно ако је холоморфна на Ω и $f'(z) \neq 0$ $\forall z \in \Omega$

деф 2: $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ је конформно ако је f 1-1 и холоморфна из Ω_1 на Ω_2.

ОВЕ ДЕФ. НИСУ ЕКВИВАЛЕНТНЕ!

Наводим обе јер се у литератури срећу обе дефиниције.

Ми ћемо користити деф 2. (обратите пажњу у литератури о којој је деф. реч)

Тврђење 1. Нека је $f : \Omega \to \mathbb{C}$ холоморфна. Тада је f локално 1-1 акко је $f'(z) \neq 0$, $\forall z \in \Omega$.

Дакле f 1-1, хол. $\Rightarrow f'(z) \neq 0$ $\forall z \in \Omega$

(тј. деф 2 $\Rightarrow$ деф 1)

деф 1 $\not\Rightarrow$ деф 2 : пресликавање $f(z) = e^z$ је пример

$f'(z) = e^z \neq 0$, f није 1-1 у $\mathbb{C}$, али локално јесте 1-1

подсетник:

(f локално 1-1 у Ω ако за свако $z \in \Omega$ постоји $U(z)$ на којој је f 1-1)

Ако је $f'(z_0) \neq 0$, онда $\exists U(z_0)$ тд. је f 1-1 на $U(z_0)$.

Ако је $f = u + iv$ $\quad Df = \begin{bmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{bmatrix}$

$$J_f = \det Df = u_x v_y - u_y v_x \underset{*}{=} u_x^2 + v_x^2 = |f'|^2$$

$$i f_y = -i u_x - u_x = -f_x$$

КР. услови

$u_x = v_y \qquad f_x = u_x + i v_x \quad , f_y = u_y + i v_y = -v_x + i u_x$

$u_y = -v_x \qquad f_z = \frac{1}{2}(f_x - i f_y) = \frac{1}{2}(f_x + f_x) = f_x$

$f' = f_x$

Дакле, за f 1-1 и холом. у Ω је и $J_f \neq 0$ на Ω.

Тврђење 2: $f: \Omega_1 \to \Omega_2$ бијективно холоморфно пр. $\Rightarrow$ f^{-1} је холоморфна

Дакле, конформно пресликавање (деф 2) је бихоломорфно, тј. f и f^{-1} су холоморфне функције.

Тврђење 3: Конформно пресликавање чува углове између кривих.

(ово важи за обе деф.)

Тврђење 4: f неконстантна, холоморфна, $f: \Omega \to \mathbb{C}$, Ω област

Ако је $f(z_0) = w_0$, онда постоји $K \geq 1$ и холоморфна ф-ја φ на некој околини $U(z_0)$ тд. је $\varphi(z_0) = 0$, $\varphi'(z_0) \neq 0$ и

$f(z) = w_0 + (\varphi(z))^K$, $\forall z \in U(z_0)$.

K је најмањи цео број тд. је $f^{(K)}(z_0) \neq 0$

$\Omega \subseteq \overline{\mathbb{C}}$ $\quad$ $Aut(\Omega) = \{ f: \Omega \to \Omega \mid f \text{ конформно} \}$

деф 3: Ако постоји конформно пр. из Ω_1 у Ω_2 кажемо да су Ω_1 и Ω_2 конформно еквивалентне.

$$Aut(\mathbb{D}) = \left\{ e^{i\alpha} \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0} z} : z_0 \in \mathbb{D}, \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$ (доказали смо)

$$Aut(\overline{\mathbb{C}}) = \left\{ \frac{az+b}{cz+d} : a, b, c, d \in \mathbb{C},\ ad - bc \neq 0 \right\}$$ (сви Мебијуси)

$$Aut(\mathbb{C}) = \{ az + b : a, b \in \mathbb{C} \}$$ (доказаћемо)
(следиће из зад. 1)

1 Ако је $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ холоморфна (односно цела) бијекција, доказати да је $f(z) = az + b$, за неке $a, b \in \mathbb{C}$ и све $z \in \mathbb{C}$. $(a \neq 0)$

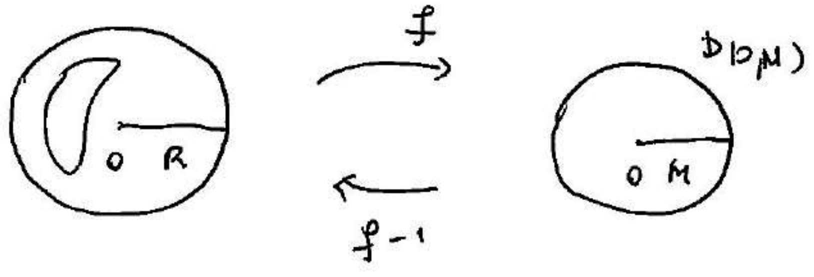
$\lim_{z \to \infty} f(z) = \infty$ $\leftarrow$ докажимо да ово важи, па ће следити из зад из КА да је f полином (зад. 11.3. у Бојановој збирци)

Нека је $M>0$ произвољно.

Докажимо да постоји $R>0$ т.д. је за $|z|>R$ испуњено $|f(z)|>M$.

$\overline{D(0,M)}$ је компакт $\Rightarrow$ $f^{-1}(\overline{D(0,M)})$ је компактан, па је затворен и ограничен

$$\Rightarrow (\exists R>0)\ f^{-1}(\overline{D(0,M)}) \subseteq D(0,R)$$



$\Rightarrow$ за $|z|>R$ је (због $f(\mathbb{C})=\mathbb{C}$) $|f(z)|>M$ $\Rightarrow \lim\limits_{z\to\infty} f(z)=\infty$

Сада на основу поменутог задатка, важи да је f полином.

$n=\deg f$

пис $n\geq 2$

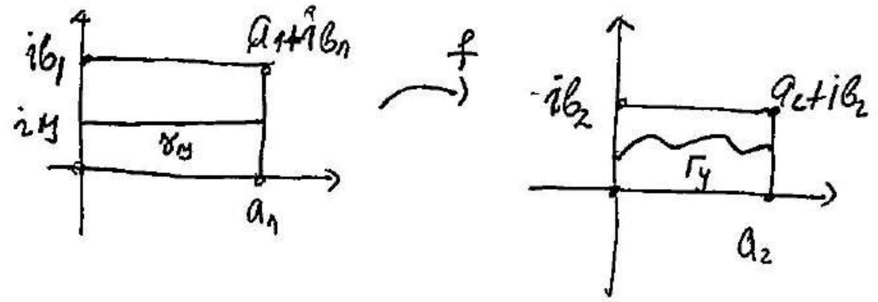
тада $f(z)=0$ има n корена, па пошто је f 1-1 корени морају бити исти $\Rightarrow f(z)=c(z-z_0)^n$

Али тада је $f(z_0+1)=c=f(z_0+e^{i\frac{2\pi}{n}})$ што је у контрадикцији са тим да је f 1-1.

$\Rightarrow \boxed{n=1}$ ($n\neq 0$ јер је $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)=\infty$)

Дакле, $f(z)=az+b$, $a\neq 0$, $a,b\in\mathbb{C}$.

(2) Ако је f 1-1 холоморфно пресликавање (конформно) правоугаоника $R_1=\{z=x+iy\in\mathbb{C}:\ 0<x<a_1,\ 0<y<b_1\}$ на правоугаоник $R_2=\{w=u+iv\in\mathbb{C}:\ 0<u<a_2,\ 0<v<b_2\}$ које темена слика у темена тј. $f(0)=0$, $f(a_1)=a_2$, $f(ib_1)=ib_2$ и $f(a_1+ib_1)=a_2+ib_2$, доказати да су тада R_1 и R_2 слични, тј. $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}$.



<u>I начин</u>:

$\gamma_y(x)=x+iy$, y фиксиран, $x\in[0,a_1]$

$\Gamma_y=f\circ\gamma_y$ Γ_y спаја странице парал. са y осом у R_2 (јер се темена сликају у одговарајућа темена, па онда и странице у одговарајуће странице)

$\Rightarrow\ l(\Gamma_y)\geq a_2\quad \forall y\in[0,b_1]$

$$a_2\leq\int_{\Gamma_y}|dw|=\int_0^{a_1}|f'(x+iy)|\,dx,\quad y\in[0,b_1]$$

Интегралимо обе стране $\int_0^{b_1}dy$, па се добија

$$a_2\cdot b_1\leq\int_0^{b_1}\left(\int_0^{a_1}|f'(x+iy)|\,dx\right)dy\underset{\text{фубини}}{=}\iint_{[0,a_1]\times[0,b_1]}|f'(x+iy)|\,dx\,dy\underset{\text{КШ}}{\leq}$$

$$\sqrt{\iint_{R_1}|f'(x+iy)|^2dx\,dy\cdot\iint_{R_1}dx\,dy}\ \underset{\substack{f:R_1\to R_2\\ \text{смена променљиве}}}{=}\ \sqrt{a_1b_1\cdot\iint_{R_2}du\,dv}=\sqrt{a_1b_1a_2b_2}$$

$\boxed{\text{јер}\quad J_f=|f'|^2}$

$\Rightarrow\ b_1^2a_2^2\leq a_1b_1a_2b_2$ тј. $b_1a_2\leq a_1b_2$ тј. $\frac{a_1}{b_1}\geq\frac{a_2}{b_2}$

Применом аналогног поступка на f^{-1} добија се

$$b_1 a_2 \geq a_1 b_2$$

Дакле $b_1 a_2 = a_1 b_2$, па је $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$, тј. правоугаоници су слични.

II начин: применом принципа рефлексије (симетрије)

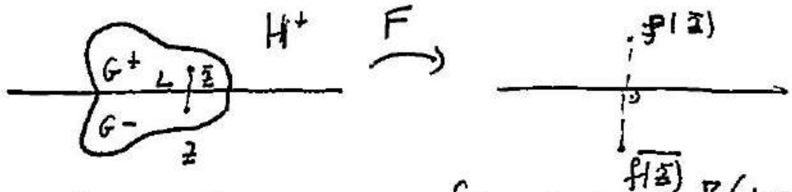
Шварцов принцип симетрије (ШПС)

Нека је G^+ област у горњој полуравни $H^+=\{z\in\mathbb{C} : \operatorname{Im} z>0\}$ и L сегмент у $\mathbb{R}$.

($G^+\subseteq H^+$, $L\subseteq\mathbb{R}$, G^+ област, L сегмент)

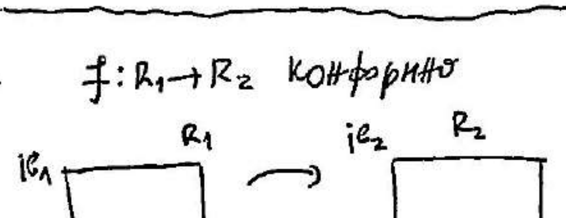
Ако је $G^-=\{z\in\mathbb{C} : \bar z\in G\}$ област симетрична са G у односу на $\mathbb{R}$ (реалну осу) тако да је $G^+\cup L\cup G^-$ област и f је холоморфна на G^+, непрекидна на $G^+\cup L$ и $f(x)\in\mathbb{R}$ за све $x\in L$, тада постоји фја F холоморфна на $G^+\cup L\cup G^-$ тд. је $F(z)=f(z)$ $\forall z\in G^+$.

Ова фја задовољава релацију: $F(z)=\overline{f(\bar z)}$, $\forall z\in G^-$.



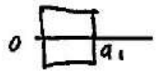
Уопштава се на тражен када је уместо реалне осе било која права! (ротацијом се доказује)

пр. $f: R_1\to R_2$ конформно



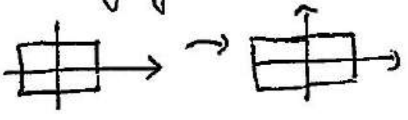
Пошто се темена сликају на темена, и странице се сликају на одговарајуће странице, тј. је за $L=[0,a_1]$, $f(x)\in\mathbb{R}$ $\forall x\in[0,a_1]$ ($x\in L$)

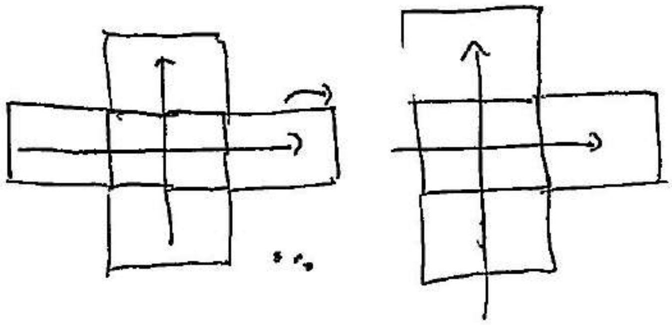
f задовољава услове ШПС (f је хол. на R_1, непр. на $R_1\cup L$)

$\Rightarrow$ f се може продужити холоморфно на  већи правоугаоник

а слика је такође симетрична у односу на x осу!

Сада на основу уопштења ШПС проширујемо даље симетрично!





добијамо проширење на холоморфну бијекцију из $\mathbb{C}$ у $\mathbb{C}$

На основу задатка (1) је $f(z)=az+b$, $a\neq 0$, $a,b\in\mathbb{C}$

због услова $f(0)=0$, добијамо $b=0$, тј. $f(z)=az$, $a\neq 0$

због услова $f(ib_1)=ib_2$, добијамо $ib_2=a\cdot ib_1$, па је $a=\frac{b_2}{b_1}\in\mathbb{R}$

због услова $f(a_1)=a_2$ добијамо $a_2=a\,a_1$ тј.

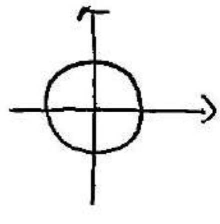
коначно $a=\frac{a_2}{a_1}=\frac{b_2}{b_1}$, па су правоугаоници слични.

? Принцип рефлексије се употребљава и када уместо сегмента праве L имамо кружни лук. Тада је симетрија инверзија у односу на кружницу која садржи тај лук. $\left[\, F(z)=f(z^*)^* \quad \left(z^*=z_0+\frac{R^2}{\overline{z-z_0}}\right)\right]$

$G^- = G^* = \{z\in\mathbb{C} : z^*\in G\}$

---

(3) Одредити највећи диск са центром у 0 тд. је $f(z)=z^2+z$ 1-1 у том диску.



$f(z_1)=f(z_2) \Leftrightarrow z_1^2+z_1=z_2^2+z_2$

$\Leftrightarrow (z_1-z_2)(z_1+z_2)+(z_1-z_2)=0$

$\Leftrightarrow (z_1-z_2)(z_1+z_2+1)=0$

за $z_1+z_2\neq -1$ је $z_1=z_2$

$|z_1+z_2|\leq |z_1|+|z_2|$ за $|z_1|,|z_2|<\frac{1}{2}$ је

$|z_1+z_2|<1$ па је $z_1+z_2\neq -1$ за $z_1,z_2\in D(0,\frac{1}{2})$.

Дакле, f је 1-1 на $D(0,\frac{1}{2})$.

<u>за $z_1,z_2\in D(0,\frac{1}{2}+2\varepsilon)$</u>: нпр. за $z_1=-\frac{1}{2}-\varepsilon$, $z_2=-\frac{1}{2}+\varepsilon$

испуњено $z_1+z_2=-1$, па је $f(z_1)=f(z_2)$

тј. f није 1-1 у $D(0,\frac{1}{2}+2\varepsilon)$, $\varepsilon>0$.

Дакле, $D(0,\frac{1}{2})$ је тражени диск!