Ознака: $\Omega = \{re^{i\varphi} : 0<r<+\infty,\ \alpha<\varphi<\beta\}$, $\beta-\alpha \in (0,2\pi]$

пишемо скраћено $\Omega=\{\alpha<\varphi<\beta\}$.

Грана логаритма

$$g(z)=\log|z|+i\cdot\arg z = \log r + i\varphi, \quad z=re^{i\varphi}$$

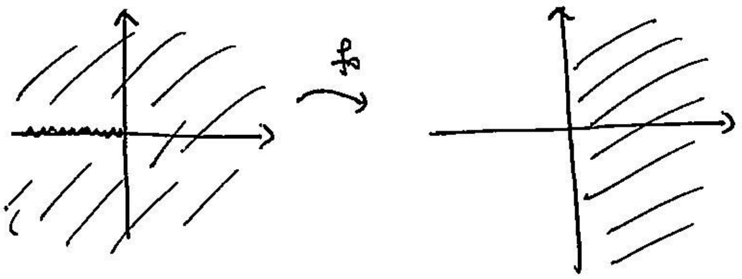
Грана n-тог корена

$$f(z)=\sqrt[n]{|z|}\,e^{i\frac{\arg z}{n}}=\sqrt[n]{r}\cdot e^{i\frac{\varphi}{n}}, \quad z=re^{i\varphi}$$

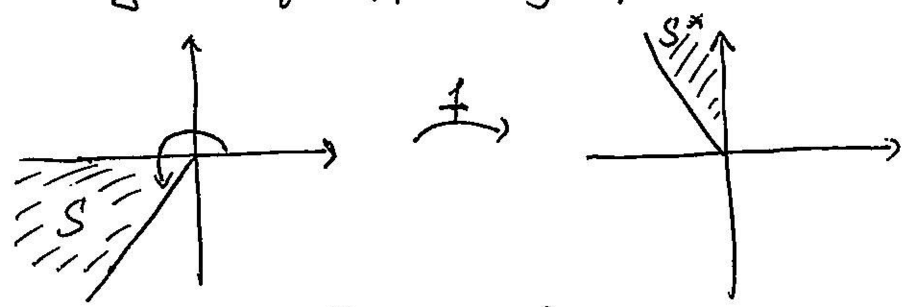
$$z\in\Omega$$

- Нека је $D_0=\{-\pi<\varphi<\pi\}$ и $f_0(z)=\sqrt{r}\,e^{i\frac{\varphi}{2}}$.

$f_0(D_0)=\{-\frac{\pi}{2}<\psi<\frac{\pi}{2}\}$, $f_0$ 1-1 и на (из $D_0$ на $f(D_0)$)




- Ако је $S=\{\pi\le\varphi<\pi+\delta\}$, $0<\delta<\pi$




$\frac{\varphi}{2}\in[\frac{\pi}{2},\frac{\pi+\delta}{2})$ $\quad$ $f_0$ се продужава на $S\cup D_0$

$S^*=f_0(S)$ $\quad$ и слика $S$ на $S^*=\{\frac{\pi}{2}\le\psi<\frac{\pi+\delta}{2}\}$

$f_0$ није једнозначно продужено на $S$!

$f(z)=\sqrt{r}\,e^{i\frac{\varphi}{2}}$, $\pi\le\varphi<\pi+\delta$ $\qquad$ $S^\circ=\operatorname{int}S$

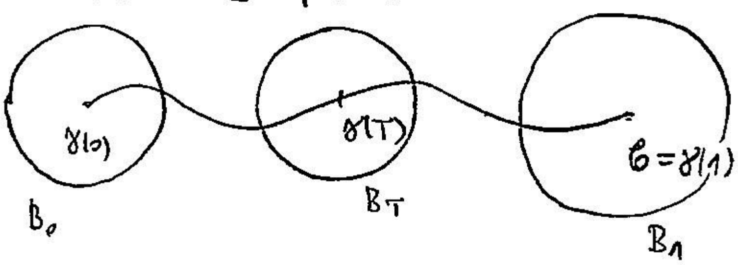
$f$ је дефинисано на $S$ помоћу гране аргумента $\varphi\in(\pi,\pi+\delta)$, а

$f_0$ је дефинисано на $S^\circ$ помоћу гране аргумента $\varphi_0\in(-\pi,-\pi+\delta)$

## * Аналитичко продужење дуж пута

$\gamma: I \to \mathbb{C}$ пут, $\gamma(0) = a$, $\gamma(1) = b$, $I = [0,1]$

$B_0$ круг са центром $a$




$\mathcal{F}_0 = (B_0, f_0)$ кружни елемент ($B_0$ диск, односно круг), $f_0$ аналит. на $B_0$

$\mathcal{F}_0$ се продужава дуж пута $\gamma$ ако постоји фамилија кружних елемената $\mathcal{F}_T = (B_T, f_T)$, $T \in I$, $\gamma(T)$ центар од $B_T$ тд. важи:

$(\forall T \in I)(\exists \delta > 0)\ |t - T| < \delta \Rightarrow \gamma(t) \in B_T$ и $\mathcal{F}_t$ је непосредно аналит. продужење елемента $\mathcal{F}_T$

$\mathcal{F}_1$ је аналитичко продужење $\mathcal{F}_0$ дуж $\gamma$

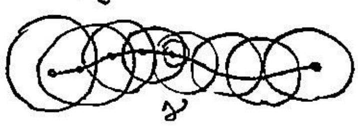
Примери:

1) Ако је $\mathcal{F}_a = (U_a, f_a)$ кружни елемент и $b \in U_a$ произвољна можемо развити $f_a$ у Тејлоров ред око $b$, означимо га са $f_b$

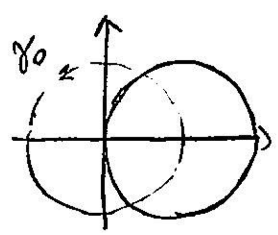
$$f_b(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_a^{(n)}(b)}{n!}(z-b)^n$$ и нека је област конв. $U_b$

Елемент $(U_b, f_b)$ је непосредно аналитичко продужење $(U_a, f_a)$

Ако бисмо уочили криву $\gamma$ и бирали $a = \gamma(0)$, $b = \gamma(T)$, настављајући на овај начин, добили бисмо продужење дуж криве $\gamma$.

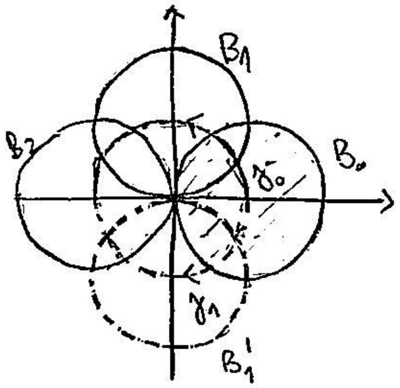



2) $B_0 = \{ z \in \mathbb{C} : |z-1| < 1 \}$, $f_0(z) = \sqrt{|z|}\, e^{i \arg z / 2}$, $-\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{\pi}{2}$




$f_0$ деф. на $B_0$

$\gamma_0(t) = e^{it}$, $t \in [0, \pi]$ — $\gamma_0$ јединична кружница са центром 0




довољно је размотрити ланац кругова

$B_0, B_1, B_2$

$B_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z-i| < 1\}$

$B_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z+1| < 1\}$

$z = re^{i\varphi}$ $\quad f_0(z) = \sqrt{r}\, e^{i\frac{\varphi}{2}}$, $\varphi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ анал. на $B_0$

на $B_1$ : $f_1(z) = \sqrt{r}\, e^{i\frac{\varphi}{2}}$, $\varphi \in (0, \pi)$ анал. на $B_1$

на $B_2$ : $f_2(z) = \sqrt{r}\, e^{i\frac{\varphi}{2}}$, $\varphi \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ анал. на $B_2$

$(B_2, f_2)$ је анал. продужење $(B_0, f_0)$ дуж пута $\gamma_0$

Аналогно, помоћу ланца кругова $B_0, B_1', B_2$ можемо продужити $(B_0, f_0)$ дуж пута $\gamma_1(t) = e^{-it}$ $\quad t \in [0, \pi]$

на $B_1'$ : $f_{11}(z) = \sqrt{r}\, e^{i\frac{\varphi}{2}}$, $\varphi \in (-\pi, 0)$

на $B_2$ : $f_{21}(z) = \sqrt{r}\, e^{i\frac{\varphi}{2}}$, $\varphi \in (-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2})$

$(B_2, f_{21})$ је аналитичко продужење $(B_0, f_0)$ дуж пута $\gamma_1$

за $z = -r \in B_2$ је $\quad f_2(z) = \sqrt{r}\, e^{i\frac{\pi}{2}} = i\sqrt{r}$

$f_{21}(z) = \sqrt{r}\, e^{i\frac{-\pi}{2}} = -i\sqrt{r}$

$\Rightarrow f_2 \neq f_{21}$

$\Rightarrow$ није једнозначно продужење дуж кривих!

**Теорема 1 (Монодромија)** Ако је $\Omega$ просто повезана област, $(B, f)$ елемент, $B \subset \Omega$ и $(B, f)$ се може продужити дуж сваког пута је у $\Omega$ са почетном тачком у центру круга $B$. Тада постоји $g \in H(\Omega)$ тако да $g(z) = f(z)$ $\forall z \in B$.

**Теорема 2 :** $\Omega$ просто повезана област, $f : \Omega \to \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ холом. фја на $\Omega$. Тада постоји холоморфна фја $g$ на $\Omega$ тд је $e^g = f$ на $\Omega$ и $h = e^{\frac{g}{n}}$ која задов. $h^n = f$

($h$ такође холоморфна)