① Испитати конвергенцију следећих редова:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{x}{n}$ в) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{\log n}{n}\right)^n$ д) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[n]{n!}}$

б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{x}{n}\right)$ г) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(n\log\frac{2n+1}{2n-1}-1\right)$ ђ) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\log^2|\sin\frac{1}{n}|}$

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{x}{n}$ почев од неког n_0 су сви чланови истог знака

(за $x>0$: $\frac{x}{n}\in(0,\pi)$ за $x<n\pi$ тј. $n>\frac{x}{\pi}$

за $x<0$: $-\frac{x}{n}\in(0,\pi)$ за $-x<n\pi$ тј. $n>-\frac{x}{\pi}$)

(а првих коначно много чланова не утиче на конв.)

$\Rightarrow$ можемо применити поредбене критеријуме.

$\sin\frac{x}{n}\sim\frac{x}{n}$, $n\to\infty$ за $x\neq 0$ (за $x=0$ је $\sin\frac{x}{n}=0$, па ред тривијално конв)

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{n}$ дивергира

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{x}{n}$ дивергира

б) $1-\cos\frac{x}{n}=2\sin^2\frac{x}{2n}\geq 0$ (чланови реда ненегативни)

за $x=0$: $1-\cos\frac{x}{n}=0$, па ред конвергира

за $x\neq 0$: $1-\cos\frac{x}{n}=2\sin^2\frac{x}{2n}\sim 2\cdot\left(\frac{x}{2n}\right)^2=\frac{2x^2}{4n^2}=\frac{x^2}{2n^2}$, $n\to\infty$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^2}{2n^2}$ конвергира $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{x}{n}\right)$ конвергира

в) $a_n=\left(1-\frac{\log n}{n}\right)^n=e^{n\log\left(1-\frac{\log n}{n}\right)}=e^{n\cdot\left(-\frac{\log n}{n}-\frac{\log^2 n}{2n^2}+o\left(\frac{\log^2 n}{n^2}\right)\right)}$

$=e^{-\log n-\frac{\log^2 n}{2n}+o\left(\frac{\log^2 n}{n}\right)}=e^{-\log n}\cdot e^{-\frac{\log^2 n}{2n}+o\left(\frac{\log^2 n}{n}\right)}\underset{n\to\infty}{\sim}e^{-\log n}$

$a_n\sim\frac{1}{e^{\log n}}=\frac{1}{n}$, $n\to\infty$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ дивергира $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}a_n$ дивергира г) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left(n \log \frac{2n+1}{2n-1} - 1\right)}_{a_n}$

$$a_n = n \cdot \log \frac{2n+1}{2n-1} - 1 = n \cdot \log\left(1 + \frac{2}{2n-1}\right) - 1$$

$$= n \cdot \left(\frac{2}{2n-1} - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{2n-1}\right)^2 + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{2n-1}\right)^3 + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) - 1$$

$$= \frac{2n}{2n-1} - \frac{n}{2} \cdot \frac{4}{(2n-1)^2} + \frac{n}{3} \cdot \frac{8}{(2n-1)^3} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) - 1$$

$$= \frac{\cancel{2n} - \cancel{2n} + 1}{2n-1} - \frac{2n}{(2n-1)^2} + \frac{8n}{3(2n-1)^3} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$= \frac{2n-1-2n}{(2n-1)^2} + \frac{8n}{3(2n-1)^3} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$= \frac{-1}{(2n-1)^2} + \frac{8n}{3(2n-1)^3} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$= \frac{-3(2n-1) + 8n}{3(2n-1)^3} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{2n+3}{3(2n-1)^3} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$= \frac{2n-1+4}{3(2n-1)^3} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{3(2n-1)^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right), \ n \to \infty$$

$$a_n \sim \frac{1}{12n^2}, \ n \to \infty$$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{12n^2}$ конвергира $\Rightarrow \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергира

д) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \sqrt[n]{n!}}$, Стирлингова ф-ла: $n! \sim \sqrt{2n\pi}\, n^n e^{-n}, \ n \to \infty$

$$\sqrt[n]{n!} \sim \frac{n}{e}, \ n \to \infty$$

$$\frac{1}{n \sqrt[n]{n!}} \sim \frac{1}{n^2 \cdot \frac{1}{e}} = \frac{e}{n^2}, \ n \to \infty$$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e}{n^2}$ конв. $\Rightarrow \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \sqrt[n]{n!}}$ конвергира б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\log^2(\sin\frac{1}{n})}$

$$\log^2(\sin\tfrac1n) = \log^2\left(\frac1n - \frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) = \left(\log\left(\frac1n\left(1-\frac{1}{6n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right)\right)^2$$

$$= \Big(-\log n + \underbrace{\log\left(1-\frac{1}{6n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)}_{\downarrow\, 0}\Big)^2 \sim \log^2 n,\ n\to\infty$$

$$\frac{1}{\log^2(\sin\frac1n)} \sim \frac{1}{\log^2 n},\ n\to\infty$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\log^2 n}$ дивергира (са вежби знате) $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\log^2(\sin\frac1n)}$ дивергира

(2) У зависности од параметара a, b, где је $b>0$, испитати конв:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{n^a \sin\frac{1}{n^b}\cdot\log\frac{n+1}{n}}_{a_n}.$$

$$a_n = n^a\sin\frac{1}{n^b}\cdot\log\left(1+\frac1n\right) \sim n^a\cdot\frac{1}{n^b}\cdot\frac1n = \frac{1}{n^{b+1-a}}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{b+1-a}}$ конвергира $\Leftrightarrow$ $b+1-a>1$

$\Leftrightarrow$ $b-a>0$

$\Leftrightarrow$ $b>a$

Дакле, и $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конв. $\Leftrightarrow$ $b>a$.

(3) Испитати конв. следећих редова:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2+n}$ б) $\sum_{n=2}^{\infty} (\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^p \log\frac{n-1}{n+1}$, $p\in\mathbb{R}$ в) $\sum_{n=3}^{\infty} \log^p\frac{1}{\cos\frac{\pi}{n}}$, $p\in\mathbb{R}$

а) $a_n = \frac{2^n}{n^2+n}$ $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, па ред дивергира

б) $\log\frac{n-1}{n+1} = \log\left(1-\frac{2}{n+1}\right) < 0$

$$-\log\left(1-\frac{2}{n+1}\right) = -\left(\frac{-2}{n+1} + o\left(\frac1n\right)\right),\ n\to\infty$$

$$a_n = \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)^p \log\frac{n-1}{n+1} = \left(\sqrt{n}\cdot\left(\sqrt{\frac{n+1}{n}}-1\right)\right)^p \log\left(1-\frac{2}{n+1}\right)$$

$$-a_n = n^{\frac{p}{2}}\cdot\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}}-1\right)\cdot\left(-\log\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\right)$$

$$= n^{\frac{p}{2}}\left(\cancel{1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)-\cancel{1}\right)\cdot\left(-\left(-\frac{2}{n+1}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right),\ n\to\infty$$

$$= n^{\frac{p}{2}}\cdot\left(\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^p\cdot\underbrace{\left(\frac{2}{n+1}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)}_{\sim\frac{2}{n}},\ n\to\infty$$

$$\sim n^{\frac{p}{2}}\cdot\frac{1}{2^p n^p}\cdot\frac{2}{n},\ n\to\infty$$

$$-a_n \sim \frac{1}{n^{\frac{p}{2}+1}\cdot 2^{p-1}}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{p}{2}+1}} \text{ конв} \Leftrightarrow \frac{p}{2}+1>1 \Leftrightarrow \frac{p}{2}>0 \Leftrightarrow p>0$$

$\Rightarrow$ еквиконв. редова ПК $\quad \sum_{n=2}^{\infty}(-a_n)$ конв. $\Leftrightarrow p>0$

в) $$a_n = \log^p\frac{1}{\cos\frac{\pi}{n}} = \left(-\log\left(\cos\frac{\pi}{n}\right)\right)^p = \left(-\log\left(1-\frac{\pi^2}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right)^p$$

$$\sim\left(\frac{\pi^2}{2n^2}\right)^p,\ n\to\infty$$

$$a_n\sim\frac{\pi^{2p}}{2^p n^{2p}},\ n\to\infty \quad , \sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n^{2p}} \text{ конв.} \Leftrightarrow 2p>1 \Leftrightarrow p>\frac{1}{2}$$

$\Rightarrow$ еквик. ПК $\quad \boxed{\sum_{n=3}^{\infty}a_n \text{ конв} \Leftrightarrow p>\frac{1}{2}}$