① У зависности од $\alpha>0$, испитати конвергенцију интеграла:

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x}}{|x-1|^{\alpha-1}\ln x}\,dx$$

могући сингуларитети : $0, 1, \infty$

- ∞ јесте синг.
- за 0 и 1 треба проверити у којим случајевима јесу, а у којим нису. $f(x)=\frac{e^{-\alpha x}}{|x-1|^{\alpha-1}\ln x}$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} f(x)dx + \int_1^2 f(x)dx + \int_2^{+\infty} f(x)dx = \int_0^{+\infty} f(x)dx$$

$\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{e^{-\alpha x}}{|x-1|^{\alpha-1}\ln x} = 0$, па је 0 отклоњив сингуларитет

за $x\in(\frac{1}{2},1)$ је $\ln x<0$, па посматрамо $-f(x)=\frac{e^{-\alpha x}}{|x-1|^{\alpha-1}(-\ln x)}$ која је позитивна на $(\frac{1}{2},1)$, па можемо користити поредбени критеријум

$$\frac{e^{-\alpha x}}{|x-1|^{\alpha-1}(-\ln x)} \sim \frac{e^{-\alpha}}{(1-x)^{\alpha}},\ x\to 1^-$$

јер $|x-1|^{\alpha-1}=(1-x)^{\alpha-1}$

$-\ln x = -\ln(1+x-1) = -\ln(1-(1-x)) \sim 1-x$ за $x\to 1^-$

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{(1-x)^{\alpha}}dx \underset{\substack{t=1-x\\ dt=-dx}}{=} \int_{\frac{1}{2}}^{0} \frac{1}{t^{\alpha}}(-dt) = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{t^{\alpha}} \quad \text{конв.} \Leftrightarrow \alpha<1$$

Дакле, и $\int_{\frac{1}{2}}^{1} -f(x)dx$ конв. $\Leftrightarrow \alpha<1$

па и $\int_{\frac{1}{2}}^{1} f(x)dx$ конв. $\Leftrightarrow \alpha<1$

конвергира за $\alpha<1$

за $x\in(1,2)$ је $\ln x>0$: $\frac{e^{-\alpha x}}{|x-1|^{\alpha-1}\ln x} \sim \frac{e^{-\alpha}}{(x-1)^{\alpha}},\ x\to 1^+$

$\ln x = \ln(1+x-1) \sim x-1,\ x\to 1^+$

$|x-1|^{\alpha-1} = (x-1)^{\alpha-1}$

$$\int_1^2 \frac{dx}{(x-1)^\alpha} \underset{\substack{t=x-1\\ dt=dx}}{=} \int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha} \text{ конв.} \Leftrightarrow \alpha<1$$

Дакле, кад сумирамо $\int_0^2 f(x)\,dx$ конв $\Leftrightarrow \alpha<1$

Остаје још да се види када конвергира $\int_2^{+\infty} f(x)\,dx$

За $x>2$ је $f(x)>0$, па можемо користити поредбени критеријум

$$\frac{e^{-\alpha x}}{(x-1)^{\alpha-1}\ln x} = \frac{1}{e^{\alpha x}(x-1)^{\alpha-1}\ln x} = \frac{(x-1)^{1-\alpha}}{e^{\alpha x}\ln x}$$

(довољно је да проверавамо $\alpha<1$, јер иначе свакако не конв. цео интеграл)

$\alpha>0$ – на почетку зад. дато

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{(x-1)^{1-\alpha}}{e^{\alpha x}\ln x}}{\frac{1}{x^\lambda}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^\lambda (x-1)^{1-\alpha}}{e^{\alpha x}\ln x} = 0 \text{ за нпр. } \lambda=2$$

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^\lambda}\,dx \text{ конв. за } \lambda=2 \underset{\text{ПК}}{\Rightarrow} \int_2^{+\infty} f(x)\,dx \text{ конв.}$$

Дакле, почетни интеграл конв. акко $\alpha<1$.

$(\alpha\in(0,1))$

② У зависности од $p \in \mathbb{R}$ испитати апсолутну и условну конвергенцију интеграла: $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \ln^p(x+2)\,dx$

$+\infty$ је сингуларитет

$\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} \ln^p(x+2) = \ln^p 2$, па је 0 отклоњив сингулар.

Дакле, само у околини ∞ испитујемо!

1) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln^p(x+2)}{x} = 0$ (докажите)

да ли је монотоно?

$$g(x) = \frac{\ln^p(x+2)}{x}$$

$$g'(x) = \frac{p\ln^{p-1}(x+2)\frac{x}{x+2} - \ln^p(x+2)}{x^2} = \frac{\ln^{p-1}(x+2)}{x^2}\left(\frac{px}{x+2} - \ln(x+2)\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{px}{x+2} = p$$

$$\lim_{x\to+\infty} \ln(x+2) = \infty$$

за $x \geq x_0$ је $\frac{px}{x+2} < \ln(x+2)$

па је за $x \geq x_0$ $g'(x) < 0$

па на $[x_0, +\infty)$ $g \downarrow$

* дакле, јесте монотоно

2) $\sin x$ има ограничену примитивну фју

$\underset{\text{Дирихлеов крит.}}{\Longrightarrow}$ $\displaystyle\int_{x_0}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \ln^p(x+2)\,dx$ конвергира

Пошто 0 није сингуларитет,

то конв. и $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \ln^p(x+2)\,dx$

Апсолутна конвергенција:

да ли конвергира $\int_0^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{x}\right| \ln^p(x+2)\,dx = \int_0^{+\infty} \underbrace{\frac{|\sin x|}{x} \ln^p(x+2)}_{\text{позитивна ф-ја}}\,dx$

* можемо користити поредбени критеријум

(опет сингуларитет у 0 отклоњив)

$|\sin x| \geq |\sin^2 x| = \sin^2 x$

(јер $|\sin x| - |\sin x|^2 = |\sin x| \cdot (1 - |\sin x|) \geq 0$)

$|\sin x| \geq \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$

$$\frac{|\sin x|}{x} \ln^p(x+2) \geq \frac{1-\cos 2x}{2x} \ln^p(x+2) = \frac{\ln^p(x+2)}{2x} - \frac{\cos 2x \ln^p(x+2)}{2x}$$

$\int_0^{+\infty} \frac{\cos 2x \ln^p(x+2)}{2x}\,dx$ конв. (Дирихлеов кр.)

(исто као и са sin)

када дивергира $\int_{x_0}^{+\infty} \frac{\ln^p(x+2)}{2x}\,dx$, онда
$x_0 > 0$

дивергира и наш.

$\int_{x_0}^{+\infty} \frac{1}{2x \ln^{-p}(x+2)}\,dx$ див. $\Longleftrightarrow -p \leq 1$

$\Longleftrightarrow p \geq -1$

Дакле, за $p \geq -1$ дивергира апсолутно и наш интеграл $\int_{x_0}^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} \ln^p(x+2)\,dx$

Остаје да испитамо $p < -1$:

$$\frac{|\sin x|}{x} \ln^p(x+2) \leq \frac{\ln^p(x+2)}{x} = \frac{1}{x \ln^{-p}(x+2)}$$

$\int_{x_0}^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^{-p}(x+2)}$ конв. $\Leftrightarrow -p > 1 \Leftrightarrow p < -1$

Сада, на основу ПК за $p < -1$ конвергира

$\int_{x_0}^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} \ln^p(x+2)\,dx$

Дакле:

за $p < -1$ АК

за $p \geq -1$ дивергира апсолутно

③ У зависности од реалног параметра $\alpha>0$ испитати апсолутну и условну конвергенцију интеграла: $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{\sin x}\cdot \sin 2x}{x^\alpha}dx$

- сингуларитет у ∞
- сингуларитет у 0 ? $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\sin x}\cdot \sin 2x}{x^\alpha}$

$$=\lim_{x\to 0^+} \frac{\overbrace{e^{\sin x}}^{\to 1}\cdot \sin 2x \cdot 2}{\underbrace{2x}_{\to 1}\, x^{\alpha-1}} = \begin{cases} 2 & ,\alpha=1 \\ +\infty & ,\alpha>1 \\ 0 & ,\alpha<1 \end{cases}$$

- за $\alpha\le 1$ је у 0 отклоњив сингуларитет
- за $\alpha>1$:

$$\int_0^1 \frac{e^{\sin x}\cdot \sin 2x}{x^\alpha}dx \quad , \quad x\in(0,1)$$

$$2x\in(0,2)$$

$$0<2x<2<\pi$$

$$\Rightarrow \sin 2x>0 \quad за\ x\in(0,1)$$

$$\frac{e^{\sin x}\cdot \sin 2x}{x^\alpha}\geqslant 0 \quad за\ x\in(0,1)$$

можемо користити поредбени критеријум

$$\frac{e^{\sin x}\cdot \sin 2x}{x^\alpha}\sim \frac{2x}{x^\alpha}=\frac{2}{x^{\alpha-1}}, \ x\to 0^+$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^{\alpha-1}} \text{ конв.} \Leftrightarrow \alpha-1<1 \Leftrightarrow \alpha<2$$

Дакле, $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{\sin x}\cdot \sin 2x}{x^\alpha}dx$ конв. $\Leftrightarrow \alpha<2$

(див. $\Leftrightarrow \alpha\geqslant 2$)

* Конвергенција у ∞?

$$\left|\frac{e^{\sin x}\cdot \sin 2x}{x^\alpha}\right|\le \frac{e}{x^\alpha} \quad , \quad \int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha} \text{ конв.} \Leftrightarrow \alpha>1$$

за $\alpha>1$ интеграл конв. апсолутно, па и обично конв.

за $0<\alpha\leq 1$: $\frac{1}{x^\alpha}$ монотоно тежи 0 кад $x\to+\infty$

$e^{\sin x}\cdot\sin 2x$ има ограничену примитивну фју?

$$\int e^{\sin x}\sin 2x\,dx = \begin{pmatrix} t=\sin x & \\ dt=\cos x\,dx & \sin 2x = 2\sin x\cos x\end{pmatrix}$$

$$= \int e^t\cdot t\cdot 2\,dt = \begin{pmatrix} u=t & du=dt \\ dv=e^t dt & v=e^t\end{pmatrix}$$

$$=2\left(te^t-\int e^t dt\right)=2(te^t-e^t)+C$$

$$=2\cdot(\sin x-1)\,e^{\sin x}+C$$

$$2|(\sin x-1)e^{\sin x}|\leq 2e\cdot 2=4e$$

$$\underset{\text{Дирихлеов кр.}}{\Longrightarrow} \int_1^{+\infty}\frac{e^{\sin x}\cdot\sin 2x}{x^\alpha}dx \text{ конв.}$$

Дакле, конв. за све $\alpha>0$

$$\Longrightarrow \int_0^{+\infty}\frac{e^{\sin x}\cdot\sin 2x}{x^\alpha}dx \text{ конв. за } \alpha\in(0,2)$$
$$\text{див. за } \alpha\geq 2$$

Остаје још АК за $\alpha\leq 1$: $|\sin 2x|\geq|\sin 2x|^2=\frac{1-\cos 4x}{2}$

$$\left|\frac{e^{\sin x}\cdot\sin 2x}{x^\alpha}\right|\geq \frac{e^{\sin x}}{2x^\alpha}-\underbrace{\frac{\cos 4x\,e^{\sin x}}{2x^\alpha}}$$

конв. (Дирихлеов крит. слично као изнад)

$$\int_1^{+\infty}\frac{e^{\sin x}}{2x^\alpha}dx$$

$$e^{\sin x}\geq\frac{1}{e}\ ,\quad e^{\sin x}\cdot\frac{1}{2x^\alpha}\geq\frac{1}{2ex^\alpha}$$

за $\alpha\leq 1$ је $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}$ див.

$$\underset{\text{ПК}}{\Longrightarrow}\int_1^{+\infty}\frac{e^{\sin x}}{2x^\alpha}dx \text{ див. за } \alpha\leq 1.$$

$\boxed{\text{Дакле: конв. апс. за } \alpha\in(1,2)}$