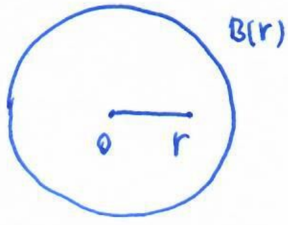
Нека је $B(r) = \{z \in \mathbb{C} : |z|<1\} \setminus [0,r]$. Означимо модул прстен домена $B(r)$ са $\mu(r)$, где је $r \in (0,1)$.



$M(B(r)) = \mu(r)$

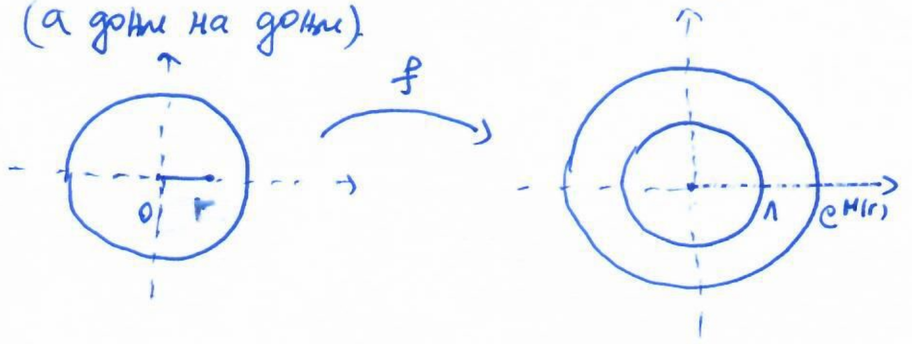
$B(r)$ се назива Гречев екстремални домен и представља домен максималног модула који раздваја тачке $0, r$ од кружнице $|z|=1$.

$B(r)$ је прстен домен (двоструко повезан домен) па се може конформно пресликати на неки прстен са центром 0 $P = \{z \in \mathbb{C} : r_1 < |z| < r_2\}$ и тада је $\mu(r) = \log \frac{r_2}{r_1}$.

$\frac{r_2}{r_1} = e^{\mu(r)}$ пресликавање $\frac{1}{r_1} \cdot z$ слика P на

$P' = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < e^{\mu(r)}\}$, па можемо ст. да је $r_1 = 1$, а $r_2 = e^{\mu(r)}$.

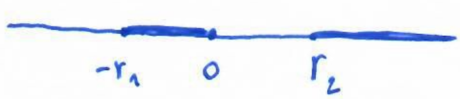
Нека је f канонско пресликавање прстен домена $B(r)$ на P можемо га изабрати т.д. горњи полудиск слика на горњи полупрстен, (а доњи на доњи).



① Ако је $B = \mathbb{C} \setminus ([-r_1, 0] \cup [r_2, \infty))$, где су $r_1, r_2 > 0$, доказати да је

$$M(B) = 2\mu\left(\sqrt{\frac{r_1}{r_1+r_2}}\right).$$

(B се назива Тајхмилеров екстремални домен и представља домен максималног модула који раздваја парове тачака $-r_1, 0$ и r_2, ∞)



Граничне компоненте домена B су симетричне у односу на круг

$$|z + r_1| = \sqrt{r_1(r_1+r_2)}$$

јер инверзија у односу на тај круг слика $-r_1$ у ∞, а 0 у r_2, па дуж $[-r_1, 0]$ слика на полуправу $[r_2, \infty]$

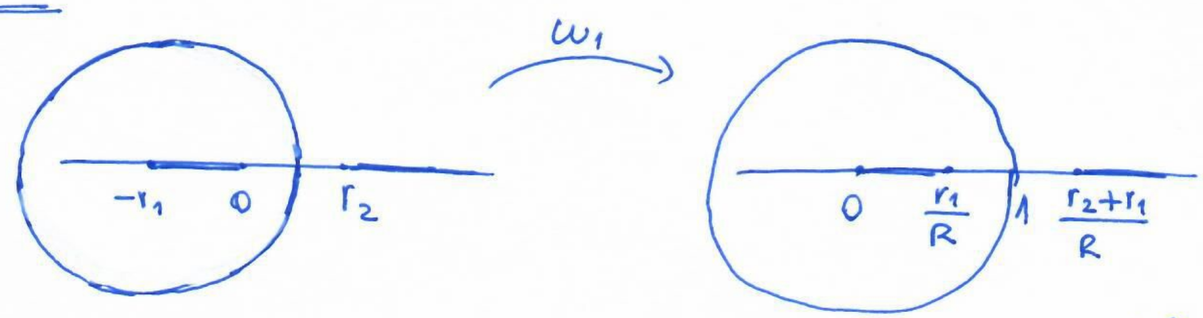
објашњење:

$z_0 = -r_1$

$$\omega(z) = z_0 + \frac{R^2}{\overline{z - z_0}}$$ формула инверзије

$\omega(z_0) = \infty$

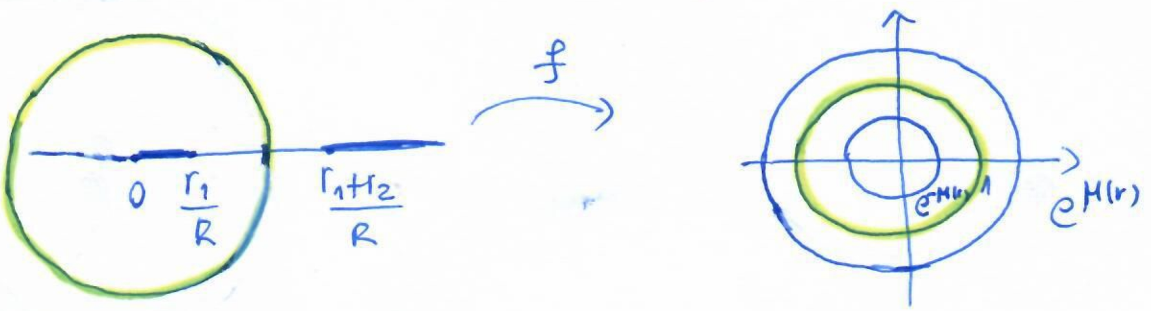
$$\omega(0) = z_0 + \frac{R^2}{-\bar{z}_0} = -r_1 + \frac{R^2}{r_1} = r_2 \Rightarrow R^2 = (r_2 + r_1) r_1 \quad \text{тј.} \quad R = \sqrt{r_1(r_1+r_2)}$$



$\omega_1(z) = (z + r_1)\cdot\frac{1}{R}$ слика B на домен чије су граничне конт. симетричне у односу на јединичну кружницу са центром 0 тј. $\omega(z) = \frac{1}{z}$ сада слика $[0, \frac{r_1}{R}]$ на $[\frac{r_2+r_1}{R}, \infty)$.

Кружница $|z| = 1$ дели B на два домена - Гречов екстр домен $B(\frac{r_1}{R})$ и њему симетричан у односу на $|z| = 1$.

Нека је f канонско пресликавање домена $B(\frac{r_1}{R})$ тако да се ∂D слика на ∂D.



$$r = \frac{r_1}{R} = \frac{r_1}{\sqrt{r_1(r_1+r_2)}}$$

$$r = \sqrt{\frac{r_1}{r_1+r_2}}$$

Принципом рефлексије Шварца можемо продужити f на цело B! $\left(f\left(\frac{1}{\bar{z}}\right) = \frac{1}{\overline{f(z)}} \right)$

И тада је слика од B прстен

$$\{ z \in \mathbb{C} : e^{-M(r)} < |z| < e^{M(r)} \}$$

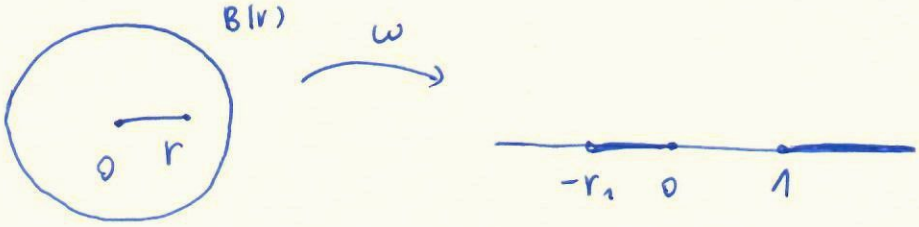
па је сада $M(B) = \log \frac{e^{M(r)}}{e^{-M(r)}} = \log e^{2M(r)}$

тј. $M(B) = 2M(r) = 2M\left(\sqrt{\frac{r_1}{r_1+r_2}}\right)$

② Доказати да ф-ја $\omega(z) = \frac{-4z}{(1-z)^2}$ слика $B(r)$ конформно на $\mathbb{C}\setminus([-r_1,0]\cup[1,\infty))$ где је $r_1 = \frac{4r}{(1-r)^2}$ и уз помоћ тога показати да је:

а) $\mu(r) = 2\mu\left(\frac{2\sqrt{r}}{1+r}\right)$

б) $\mu(r) = \frac{1}{2}\mu\left(\left(\frac{1-\sqrt{1-r^2}}{r}\right)^2\right)$.

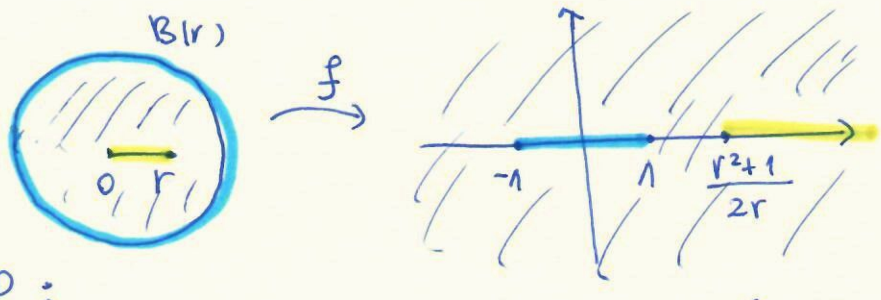


$$\omega(z) = \frac{-4z}{1-2z+z^2} = \frac{-4}{\frac{1}{z}-2+z} = \frac{-4}{z+\frac{1}{z}-2} = \frac{2}{1-\underbrace{\frac{z+\frac{1}{z}}{2}}}$$

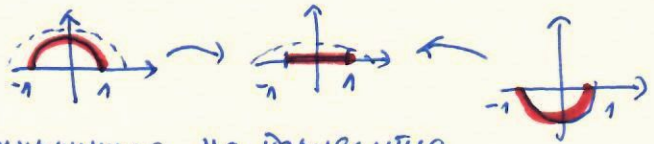
ф-ја Жуковског

$f(z) = \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$

$\omega(z) = \frac{2}{1-f(z)}$

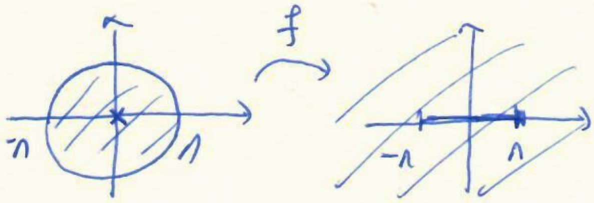


Подсетник: ф-ја Жуковског слика



полукружнице на полуелипсе

кружнице на елипсе



$f : \mathbb{D}\setminus\{0\} \xrightarrow[\text{НА}]{1-1} \mathbb{C}\setminus[-1,1]$

$\Downarrow$

$f : B(r) \xrightarrow[\text{НА}]{1-1} \mathbb{C}\setminus\left([-1,1]\cup\left[\frac{r^2+1}{2r},\infty\right)\right)$