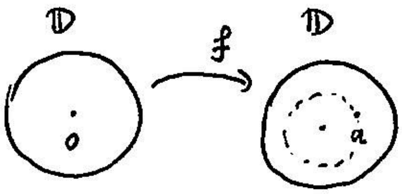
наставак : (② Шварц-Пикова лема)

① Нека је $f:\mathbb{D}\to\mathbb{D}$ холоморфна функција при чему важи $f(0)=a\neq 0$.
Доказати да фја f нема нула у диску $D(0,|a|)$.

ппс. $\exists b\in D(0,|a|)$ тд. $f(b)=0$

Шварц-Пикова лема: $\left|\dfrac{f(b)-f(0)}{1-f(b)\overline{f(0)}}\right| \le \left|\dfrac{b-0}{1-b\cdot\bar{0}}\right|$



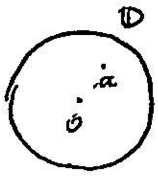
$\Rightarrow \left|\dfrac{0-a}{1-0\cdot\bar{a}}\right| \le |b|$

тј. $|a|\le|b|$ ↯ са условом $b\in D(0,|a|)$

Дакле, пп. није тачна, па f нема нула у $D(0,|a|)$.

② Нека је $f:\mathbb{D}\to\mathbb{D}$ холоморфна функција и $f(a)=0$ за неко $a\in\mathbb{D}$.
Доказати да важи: $f(z)=g(z)\cdot\varphi_a(z)$, $z\in\mathbb{D}$, где је $g:\mathbb{D}\to\overline{\mathbb{D}}$ холоморфна фја.

$$h(z)=\begin{cases}\dfrac{f(z)-f(a)}{z-a}, & z\in\mathbb{D}\setminus\{a\}\\ f'(a), & z=a\end{cases}$$



h је холоморфна на $\mathbb{D}$ јер:

на $\mathbb{D}\setminus\{a\}$ је холоморфна као композиција таквих, а у тачки a? У околини $D(a,r)\subseteq\mathbb{D}$ можемо f представити Тејлоровим редом, $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-a)^n$.

$f(a)=0 \Rightarrow a_0=0$

$f(z)=a_1(z-a)+a_2(z-a)^2+\dots$

$\dfrac{f(z)}{z-a}=a_1+a_2(z-a)+\dots$ ← фја са десне стране је представљена степеним редом, па је холоморфна

$a_1=f'(a)$

$\Rightarrow h(z)=a_1+a_2(z-a)+a_3(z-a)^2+\dots$ у околини a
па је h холом. у a?

$$\left.\begin{aligned} h(z) &= \frac{f(z)}{z-a}, \quad z \neq a \\ h(a) &= f'(a) \end{aligned}\right\} \qquad f(z) = (z-a)\cdot h(z)$$

$$\varphi_a(z) = \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$$

$$f(z) = \frac{z-a}{1-\bar{a}z} \cdot \underbrace{(1-\bar{a}z)\cdot h(z)}_{g(z)}$$

Докажимо да је $g(z) = (1-\bar{a}z)\cdot h(z)$ холоморфна на $\mathbb{D}$ и слика $\mathbb{D}$ у $\overline{\mathbb{D}}$.

Холоморфна је као производ холоморфних $1-\bar{a}\cdot z$ и $h(z)$.

Остаје да се докаже $|g(z)| \leq 1$ за све $z \in \mathbb{D}$

$$|g(z)| = |1-\bar{a}z|\,|h(z)|$$

за $z=a$: $\quad |g(a)| = |(1-\bar{a}a)\cdot h(a)| = |1-|a|^2|\cdot|f'(a)| = (1-|a|^2)\cdot\dfrac{|f'(a)|}{1-|f(a)|^2} \overset{\text{Шварц-Пикова л.}}{\leq} 1$

за $z \neq a$:

$$|g(z)| = |1-\bar{a}z|\cdot\left|\frac{f(z)}{z-a}\right| = |1-\bar{a}z|\cdot\frac{1}{|z-a|}\,|f(z)|$$

$$= \frac{1}{|\varphi_a(z)|}\cdot|f(z)| \underset{f(a)=0}{=} \frac{1}{|\varphi_a(z)|}\cdot\left|\frac{f(z)-f(a)}{1-\overline{f(a)}f(z)}\right| \leq 1$$

Шварц Пикова лема.

Дакле, заиста $g: \mathbb{D} \to \overline{\mathbb{D}}$, тј. кодомен је $\overline{\mathbb{D}}$.

③ Нека је $n\in\mathbb{N}$ и $f:\mathbb{D}\to\mathbb{D}$ холоморфна фја која се нулира у тачкама $z_1, z_2, \dots, z_n\in\mathbb{D}$. Доказати:

$$|f(0)|\le\prod_{j=1}^{n}|z_j|.$$

Вишеструком применом претходног задатка добијамо:

$$f(z)=g(z)\cdot\varphi_{z_1}(z)\cdot\varphi_{z_2}(z)\dots\varphi_{z_n}(z),\quad z\in\mathbb{D}$$

и $g:\mathbb{D}\to\overline{\mathbb{D}}$ холоморфна.

применимо на f и z_1 $\rightsquigarrow$ $f(z)=g_1(z)\varphi_{z_1}(z)$, $f(z_2)=0\Rightarrow g_1(z_2)=0$

применимо на g_1 и z_2 $\rightsquigarrow$ $g_1(z)=g_2(z)\cdot\varphi_{z_2}(z)$, $g_1(z_3)=0\Rightarrow g_2(z_3)=0$

применимо на g_2 и z_3 $\rightsquigarrow$ $g_2(z)=g_3(z)\cdot\varphi_{z_3}(z)$ итд.

$g_{n-1}(z)=g_n(z)\varphi_{z_n}(z)$ $\quad\underline{g=g_n}$

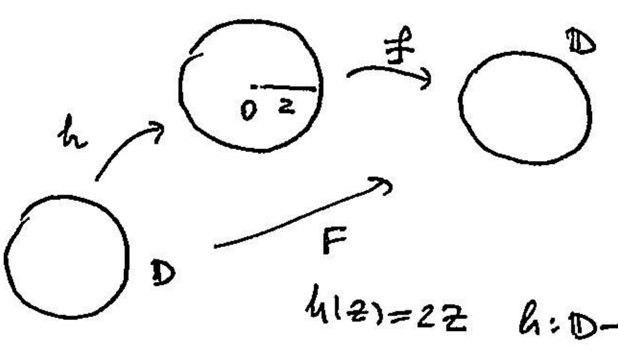
$$f(0)=g(0)\cdot\varphi_{z_1}(0)\varphi_{z_2}(0)\dots\varphi_{z_n}(0)$$

$$\varphi_{z_i}(z)=\frac{z-z_i}{1-z\overline{z_i}}\qquad \varphi_{z_i}(0)=-z_i$$

$$\Rightarrow\ |f(0)|=|g(0)|\cdot|z_1|\cdot|z_2|\cdots|z_n|\underset{\substack{\uparrow\\|g(0)|\le 1}}{\le}1\cdot|z_1||z_2|\cdots|z_n|=\prod_{j=1}^{n}|z_j|$$

④ Нека је $n\in\mathbb{N}$ и $f:D(0,2)\to\mathbb{D}$ холоморфна фја која се нулира у n-тим коренима јединице. Доказати да важи:

$$|f(0)|\le\frac{1}{2^n}.$$



$\varepsilon_k=e^{i\cdot\frac{2k\pi}{n}}$ n-ти корен из 1, $0\le k\le n-1$

$\{\varepsilon_0,\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_{n-1}\}$ скуп n-тих корена из 1

$|\varepsilon_k|=1$

$h(z)=2z\quad h:\mathbb{D}\to D(0,2)$

$F(z)=f(h(z))=f(2z)$

$F:\mathbb{D}\to\mathbb{D}$

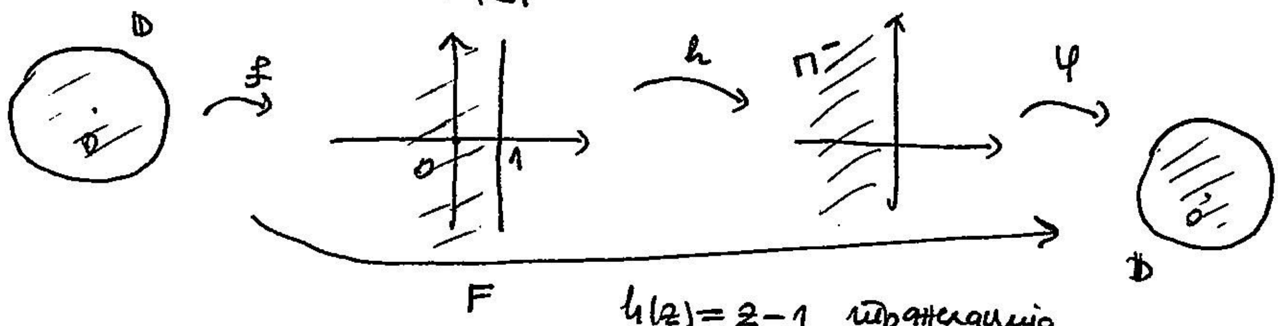
$F(\frac{1}{2}\varepsilon_k)=f(\varepsilon_k)=0$

$\Rightarrow\{\overbrace{\tfrac{1}{2}\varepsilon_k}^{z_k}:k\in\{0,1,\dots,n-1\}\}$ су нуле од F

$$\underset{\text{зад 3}}{\Rightarrow}\ |F(0)|\le\prod_{k=0}^{n-1}|z_k|=\prod_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2}|\varepsilon_k|$$

$$|f(0)|\le\left(\frac{1}{2}\right)^n\cdot\prod_{k=0}^{n-1}\underbrace{\left|e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right|}_{=1}=\frac{1}{2^n}$$

⑤ Дата је функција f која је холоморфна у $\mathbb{D}$ и важи $f(0)=0$ и $\operatorname{Re} f(z)<1$ $\forall z\in\mathbb{D}$. Доказати: $|f(z)| \le \dfrac{2|z|}{1-|z|}$ $\forall z\in\mathbb{D}$.



$h(z)=z-1$ транслација
која слика $\Omega=\{z\in\mathbb{C} : \operatorname{Re} z<1\}$
на $\Pi^-=\{z\in\mathbb{C} : \operatorname{Re} z<0\}$

φ слика Π^- на $\mathbb{D}$

$\varphi : h(0)\mapsto 0$

$-1\mapsto 0 \quad 1\mapsto\infty$ (симетричне тачке у симетричне)

$$\varphi(z)=\frac{z+1}{z-1}$$

$F=\varphi\circ h\circ f$

$F(0)=\varphi(h(f(0)))=\varphi(h(0))=\varphi(-1)=0$

$F:\mathbb{D}\to\mathbb{D}$ холоморфна (композиција холоморфних) на $\mathbb{D}$

$\Longrightarrow$ Шварцова лема: $|F(z)|\le|z|$ ← ова нам треба!

$|F'(0)|\le 1$

$$F(z)=\varphi(f(z)-1)=\frac{f(z)-1+1}{f(z)-1-1}=\frac{f(z)}{f(z)-2}$$

$$\Longrightarrow \left|\frac{f(z)}{f(z)-2}\right|\le|z|$$

$$|f(z)|\le|z|\cdot|f(z)-2|\le|z|\cdot(|f(z)|+2)$$

$$|f(z)|\cdot(1-|z|)\le 2|z| \Longrightarrow |f(z)|\le\frac{2|z|}{1-|z|} \quad \forall z\in\mathbb{D}.$$