Шварц-Пикова лема (предавања)

Нека је $f:\mathbb{D}\to\mathbb{D}$ холоморфна функција. Доказати да важи:

1° $$\left|\frac{f(z_1)-f(z_2)}{1-\overline{f(z_2)}f(z_1)}\right| \le \left|\frac{z_1-z_2}{1-\bar{z}_2 z_1}\right|, \ \forall z_1,z_2\in\mathbb{D}$$ (добија се из $|F(z)|\le|z|$ у Шварцовој леми)

2° $$\frac{|f'(z)|}{1-|f(z)|^2}\le\frac{1}{1-|z|^2}, \ \forall z\in\mathbb{D}$$ (добија се из $|F'(0)|\le 1$ у Шварцовој леми)

Осим тога, важи једнакост у 1° за неке $z_1\neq z_2$ из $\mathbb{D}$ или важи једнакост у 2° за неко $z\in\mathbb{D}$ ако и само ако је $f\in Aut(\mathbb{D})$.

- сетимо се $Aut\,\mathbb{D}=\{e^{i\alpha}\varphi_a : a\in\mathbb{D}, \alpha\in\mathbb{R}\}$, $\varphi_a(z)=\dfrac{z-a}{1-\bar{a}z}$, $\varphi_a^{-1}=\varphi_{-a}$

- $\delta:\mathbb{D}\times\mathbb{D}\to\mathbb{R}$

  $\delta(z,\omega)=|\varphi_\omega(z)| \quad \forall z,\omega\in\mathbb{D}$

  $(\mathbb{D},\delta)$ је метрички простор (предавање)

  δ псеудохиперболичко растојање

  Из Шварц-Пикове леме $\Rightarrow$ $\delta(f(z_1),f(z_2))\le\delta(z_1,z_2)$

  $=$ акко $f\in Aut(\mathbb{D})$ (за $z_1\neq z_2$)

① Нека је $f:\mathbb{D}\to\mathbb{D}$ холоморфна фја. Доказати да за све $z\in\mathbb{D}$ важи:

$$\frac{|f(0)|-|z|}{1-|zf(0)|}\le|f(z)|\le\frac{|f(0)|+|z|}{1+|zf(0)|}$$

Из Шварц-Пикове леме имамо: $\left|\dfrac{f(z)-f(0)}{1-\overline{f(0)}f(z)}\right|\le\left|\dfrac{z-0}{1-0\cdot z}\right|=|z|$

тј. $\boxed{\delta(f(z),f(0))\le\delta(z,0)}$

! Битно: важи неједнакост

$$\delta(|a|,|b|)\le\delta(a,b)$$

доказ:

$$\delta(|a|,|b|)=\left|\frac{|a|-|b|}{1-|ab|}\right| \overset{?}{\le} \left|\frac{a-b}{1-a\bar{b}}\right|$$

$$1-\delta(a,b)^2 = 1-\frac{|a-b|^2}{|1-a\bar b|^2} = \frac{(1-a\bar b)(1-\bar a b)-(a-b)(\bar a-\bar b)}{|1-a\bar b|^2}$$

$$= \frac{1-\cancel{a\bar b}-\cancel{\bar a b}+|a|^2|b|^2-|a|^2\cancel{+b\bar a}\cancel{+a\bar b}-|b|^2}{|1-a\bar b|^2}$$

$$= \frac{1-|a|^2-|b|^2+|a|^2|b|^2}{|1-a\bar b|^2} = \frac{(1-|a|^2)(1-|b|^2)}{|1-a\bar b|^2} \le \frac{(1-|a|^2)(1-|b|^2)}{(1-|ab|)^2}$$

јер $|1-|ab|| \le |1-a\bar b|$

(неједнакост Δ $|z-w| \ge ||z|-|w||$)

$$1-\delta(|a|,|b|)^2 = 1-\frac{||a|-|b||^2}{(1-|ab|)^2}$$

$$= \frac{(1-|ab|)^2-(|a|-|b|)^2}{(1-|ab|)^2}$$

$$= \frac{1-\cancel{2|ab|}+|a|^2|b|^2-|a|^2\cancel{+2|ab|}-|b|^2}{(1-|ab|)^2}$$

$$= \frac{(1-|a|^2)(1-|b|^2)}{(1-|ab|)^2} \ge 1-\delta(a,b)^2$$

из претходног дела

$$\Longrightarrow \boxed{\delta(a,b) \ge \delta(|a|,|b|)}$$

Користећи добијену неједнакост имамо:

$$\delta(|f(z)|,|f(0)|) \le \delta(f(z),f(0)) \le \delta(z,0)$$

тј.

$$\left|\frac{|f(z)|-|f(0)|}{1-|f(z)||f(0)|}\right| \le |z|$$

$$-|z| \le \frac{|f(z)|-|f(0)|}{1-|f(z)||f(0)|} \le |z|$$

$$-|z|+|z||f(z)||f(0)| \le |f(z)|-|f(0)| \le |z|-|z||f(z)||f(0)|$$

$$|f(z)|(1+|z||f(0)|) \le |f(0)| + |z|$$

$$|f(0)| - |z| \le |f(z)|(1-|z||f(0)|)$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{|f(0)|-|z|}{1-|z||f(0)|} \le |f(z)| \le \frac{|z|+|f(0)|}{1+|z||f(0)|}}$$

НАПОМЕНА

Шта бисмо добили да нисмо користили неједнакост „битно!" ?
(да смо покушали директно, само користити нej. ⚠)

$$\left|\frac{f(z)-f(0)}{1-f(z)\overline{f(0)}}\right| \le |z|$$

$$|f(z)| - |f(0)| \le |f(z)-f(0)| \le |z|\,|1-f(z)\overline{f(0)}| \le |z|\cdot(1+|f(z)||f(0)|)$$

$$\Rightarrow \quad |f(z)|\cdot(1-|z||f(0)|) \le |z| + |f(0)|$$

$$|f(z)| \le \frac{|z|+|f(0)|}{1-|z||f(0)|}$$

и

$$|f(0)| - |f(z)| \le |f(z)-f(0)| \le |z|\,|1-f(z)\overline{f(0)}| \le |z|(1+|f(z)||f(0)|)$$

$$\Rightarrow \quad |f(0)| - |z| \le |f(z)|\cdot(1+|z||f(0)|)$$

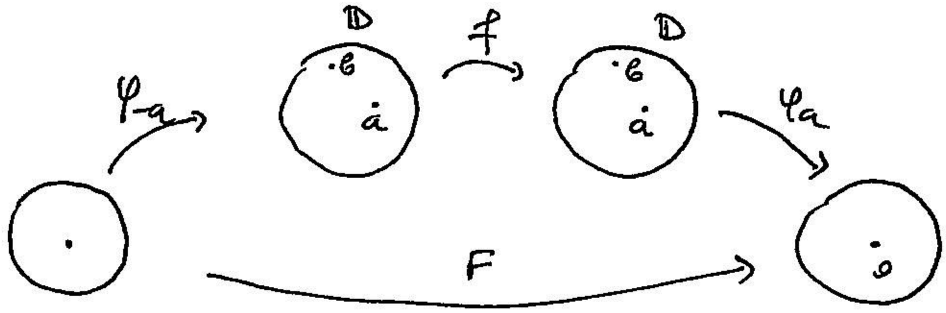
$$\frac{|f(0)|-|z|}{1+|z||f(0)|} \le |f(z)|$$

Дакле:
$$\boxed{\frac{|f(0)|-|z|}{1+|z||f(0)|} \le |f(z)| \le \frac{|z|+|f(0)|}{1-|z||f(0)|}}$$

! личи на оно што се тражи, али у питању је доста слабија неједнакост !

(2) Дата је холоморфна функција $f: \mathbb{D} \to \mathbb{D}$, при чему важи $f \neq 1_{\mathbb{D}}$. Доказати да фја f може имати највише једну фиксну тачку у $\mathbb{D}$.

<u>ППС</u>. постоје бар 2 фиксне тачке $a, b \in \mathbb{D}$, $a \neq b$.



$\varphi_a^{-1}: 0 \mapsto a$, $\infty \mapsto \frac{1}{\bar{a}}$

$\varphi_a(z) = \dfrac{z-a}{1-\bar{a}z}$

$\varphi_a^{-1} = \varphi_{-a}$

$\varphi_{-a}(z) = \dfrac{z+a}{1+\bar{a}z}$

$\boxed{\varphi_{-a}(0) = a}$ $\quad \boxed{\varphi_a(a) = 0}$

$$\left.\begin{array}{l} F = \varphi_a \circ f \circ \varphi_{-a} \\ F: \mathbb{D} \to \mathbb{D} \\ F(0) = 0 \\ F \text{ је холоморфна} \end{array}\right\} \underset{\text{Шварц}}{\Longrightarrow} \begin{array}{l} |F(z)| \leq |z| \\ |F'(0)| \leq 1 \end{array}$$

$F(z) = \varphi_a(f(\varphi_{-a}(z)))$

$\varphi_{-a}(z_0) = b \Rightarrow z_0 = \varphi_a(b)$

$F(z_0) = \varphi_a(f(\varphi_{-a}(z_0)))$

$= \varphi_a(f(b)) = \varphi_a(b) = z_0$

$\Rightarrow |F(z_0)| = |z_0|$, па се за z_0 у Шварцовој нej. достиже $=$

$\underset{\text{Шварц}}{\Longrightarrow}$ F је ротација

$F(z) = e^{i\alpha} z$, $\alpha \in \mathbb{R}$

$\varphi_a(f(\underbrace{\varphi_{-a}(z)}_{w})) = e^{i\alpha} z$

$\varphi_{-a}(z) = w$

$z = \varphi_a(w)$

$\varphi_a(f(w)) = e^{i\alpha} \varphi_a(w)$

$f(w) = \varphi_a^{-1}(e^{i\alpha}\varphi_a(w))$

$f(w) = \varphi_{-a}(e^{i\alpha}\varphi_a(w))$

$\left(\begin{array}{l} F(z_0) = e^{i\alpha} z_0 \\ F(z_0) = z_0 \end{array} \text{ даје } e^{i\alpha} = 1 \right)$

$f(w) = \varphi_{-a}(\varphi_a(w)) = w$

$\Rightarrow f = 1_{\mathbb{D}}$ ⨳ $\Rightarrow$ f не може имати више од 1 ф. тачке у $\mathbb{D}$.

③ Нека је $f: \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ холоморфна ф-ја, при чему важи $f(0)=\frac{1}{2}$.

Доказати: $\left|f\left(\frac{1}{3}\right)\right| \geq \frac{1}{5}$.

На основу зад 1 добијамо: $\dfrac{|f(0)|-|z|}{1-|f(0)||z|} \leq |f(z)| \leq \dfrac{|z|+|f(0)|}{1+|z||f(0)|}$

За $z=\frac{1}{3}$ и $f(0)=\frac{1}{2}$ је: $\dfrac{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{6}} \leq \left|f\left(\frac{1}{3}\right)\right| \leq \dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{6}}$

$$\frac{\frac{1}{6}}{\frac{5}{6}} \leq \left|f\left(\tfrac{1}{3}\right)\right| \leq \frac{\frac{5}{6}}{\frac{7}{6}}$$

$$\boxed{\frac{1}{5} \leq \left|f\left(\tfrac{1}{3}\right)\right| \leq \frac{5}{7}}$$

④ Доказати да не постоји ф-ја холоморфна $f: \mathbb{D} \to \mathbb{D}$

тд. је $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}$ и $f'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{2}{3}$.

Пп. постоји таква f

из Шварц-Пикове леме: $\dfrac{|f'(z)|}{1-|f(z)|^2} \leq \dfrac{1}{1-|z|^2}$

$z=\frac{1}{2}$: $\dfrac{\frac{2}{3}}{1-\left(\frac{3}{4}\right)^2} \leq \dfrac{1}{1-\frac{1}{4}}$

$$\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{9}{16}} \leq \frac{1}{\frac{3}{4}}$$

$$\frac{\frac{2}{3}}{\frac{7}{16}} \leq \frac{4}{3}$$

$$\frac{32}{21} \leq \frac{4}{3}$$

$96 \leq 84 \Rightarrow$ не важи то!

$\nexists f$