деф: За пресликавање f кажемо да је аутоморфизам јединичног диска $\mathbb{D}=\{z\in\mathbb{C}: |z|<1\}$ ако је $f:\mathbb{D}\to\mathbb{D}$ холоморфно и бијективно пр. Скуп свих аутоморфизама јединичног диска $\mathbb{D}$ означавамо са $Aut(\mathbb{D})$.

$1_{\mathbb{D}}$ идентичко пресликавање, $1_{\mathbb{D}}\in Aut(\mathbb{D})$

$f,g\in Aut(\mathbb{D}) \Rightarrow f\circ g\in Aut(\mathbb{D})$

$f\circ 1_{\mathbb{D}} = 1_{\mathbb{D}}\circ f = f$

Важи $f'(z)\neq 0$ за све $z\in\mathbb{D}$ (предавања)

$\Rightarrow (f^{-1})'(f(z)) = \dfrac{1}{f'(z)}$ тј. $f^{-1}\in Aut(\mathbb{D})$

Дакле, $Aut(\mathbb{D})$ је група у односу на операцију $\circ$ композиције пр.

КАА: за $a\in\mathbb{D}$ је $\varphi_a(z)=\dfrac{z-a}{1-\bar{a}z}$ холоморфно на $\mathbb{D}$, бијекција па је $\varphi_a\in Aut(\mathbb{D})$ за све $a\in\mathbb{D}$. (*)

① Доказати да је $Aut(\mathbb{D})=\{e^{i\alpha}\varphi_a : a\in\mathbb{D}, \alpha\in\mathbb{R}\}$

доказ:

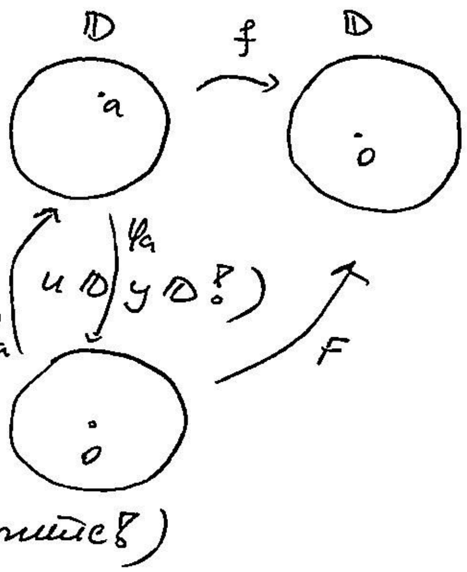
$\supseteq$: $a\in\mathbb{D}, \alpha\in\mathbb{R}$ произвољни $\overset{(*)}{\Rightarrow} \varphi_a\in Aut(\mathbb{D}) \Rightarrow e^{i\alpha}\varphi_a\in Aut(\mathbb{D})$

Дакле $\{e^{i\alpha}\varphi_a : a\in\mathbb{D}, \alpha\in\mathbb{R}\}\subseteq Aut(\mathbb{D})$.

$\subseteq$: $f\in Aut(\mathbb{D})$ произвољно одабрана

$\Rightarrow f^{-1}\in Aut(\mathbb{D})$ и нека је $a=f^{-1}(0)$

(Желимо да искористимо Шварцову лему, треба нам пресликавање које слика 0 у 0 и $\mathbb{D}$ у $\mathbb{D}$!)



Познато је: $\varphi_a:\mathbb{D}\to\mathbb{D}$

$\varphi_a(a)=0$

$\varphi_a^{-1}(0)=a \qquad \varphi_a^{-1}\overset{\mathbb{D}}{=}\varphi_{-a}$ (проверите!)

$F=f\circ\varphi_{-a}$, $F:\mathbb{D}\to\mathbb{D}$

$F(0)=f(\varphi_{-a}(0))=f(a)=0$

F и F^{-1} холоморфне
$F^{-1}: \mathbb{D} \to \mathbb{D}$
$F^{-1}(0) = 0$

$\Rightarrow$ Шварц (на F и F^{-1}) $|F^{-1}(z)| \le |z|$, $|F(z)| \le |z|$ за све $z \in \mathbb{D}$

за $\omega = F^{-1}(z)$ је $z = F(\omega)$

$\Rightarrow |\omega| \le |F(\omega)| \quad \forall \omega \in \mathbb{D}$

$\Rightarrow |F(z)| = |z|$ за све $z \in \mathbb{D}$

Дакле, у Шварцовој леми се достиже $=$ $\Rightarrow$ F је ротација

$\Rightarrow F(z) = e^{i\alpha} z, \ \forall z \in \mathbb{D}$

$\Rightarrow (f \circ \varphi_{-a})(z) = e^{i\alpha} z$

$f(\underbrace{\varphi_{-a}(z)}_{\omega}) = e^{i\alpha} z$

$z = \varphi_a(\omega)$

$\Rightarrow f(\omega) = e^{i\alpha} \varphi_a(\omega) \quad \forall \omega \in \mathbb{D}$

$\Rightarrow \boxed{f = e^{i\alpha} \varphi_a}$

2 (Шварц-Пикова лема)

Нека је $f: \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ холоморфна функција. Доказати:

1°
$$\left| \frac{f(z_1) - f(z_2)}{1 - \overline{f(z_2)} f(z_1)} \right| \le \left| \frac{z_1 - z_2}{1 - \bar{z}_2 z_1} \right|, \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{D}$$

2°
$$\frac{|f'(z)|}{1 - |f(z)|^2} \le \frac{1}{1 - |z|^2}, \quad \forall z \in \mathbb{D}$$

Осим тога, важи једнакост у 1° за неке $z_1 \ne z_2$ из $\mathbb{D}$ или важи једнакост у 2° за неко $z \in \mathbb{D}$ око и само ако је $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$.

Доказ:

Циљ је да искористимо Шварцову лему!

За произвољно $z_0 \in \mathbb{D}$ нека је $a = f(z_0) \in \mathbb{D}$

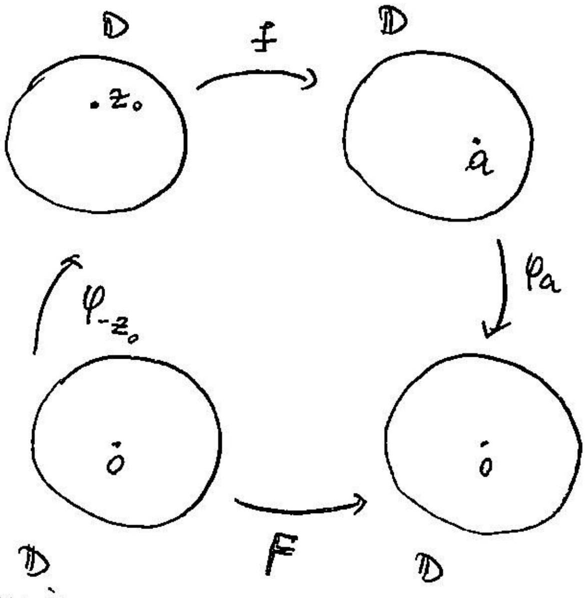
Направимо композицију пресликавања тд. добијемо $F: \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ и $F(0) = 0$!

$\varphi_a : a \longmapsto 0$

$\mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$

$\varphi_{-z_0} : 0 \longmapsto z_0$

$\mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$



$F = \varphi_a \circ f \circ \varphi_{-z_0}$

$F(0) = \varphi_a(f(z_0)) = \varphi_a(a) = 0$

F холоморфна као композиција холоморфних

$\Longrightarrow$ Шварц $\quad |F(z)| \le |z|$

$|F'(0)| \le 1$

$(\text{за све } z \in \mathbb{D})$

(из ове две једначине ћемо добити тражено)

$$F'(z) = \varphi_a'(f(\varphi_{-z_0}(z))) \cdot f'(\varphi_{-z_0}(z)) \cdot \varphi_{-z_0}'(z)$$

$$\varphi_a(z) = \frac{z-a}{1-\bar{a}z}, \quad \varphi_a'(z) = \frac{1-\bar{a}z+\bar{a}(z-a)}{(1-\bar{a}z)^2} = \frac{1-|a|^2}{(1-\bar{a}z)^2}$$

$$\varphi_{-z_0}(z) = \frac{z+z_0}{1+\bar{z}_0 z}, \quad \varphi_{-z_0}'(z) = \frac{1-|z_0|^2}{(1+\bar{z}_0 z)^2}$$

$$F'(0) = \varphi_a'(f(z_0)) \cdot f'(z_0) \cdot \varphi_{-z_0}'(0)$$

$$F'(0) = \varphi_a'(a) \cdot f'(z_0) \cdot (1-|z_0|^2) = \frac{1}{1-|a|^2}\, f'(z_0) \cdot (1-|z_0|^2)$$

Из $|F'(0)| \le 1$ добијамо $\quad |f'(z_0)| \le \dfrac{1-|a|^2}{1-|z_0|^2}$ тј. $\dfrac{|f'(z_0)|}{1-|f(z_0)|^2} \le \dfrac{1}{1-|z_0|^2}$

Пошто је $z_0 \in \mathbb{D}$ било произвољно важи

$$\frac{|f'(z)|}{1-|f(z)|^2} \le \frac{1}{1-|z|^2} \quad \text{за све } z \in \mathbb{D}. \quad (\text{доказано } 2^\circ)$$

Другу неједнакост добијамо из $|F(z)| \le |z|$ (односно 1°)

$$(\forall z \in \mathbb{D}) \quad |\varphi_a \circ f \circ \underbrace{\varphi_{-z_0}(z)}_{w}| \le |z|, \quad w = \varphi_{-z_0}(z),\ z = \varphi_{z_0}(w)$$

$$\Longleftrightarrow (\forall w \in \mathbb{D}) \quad |\varphi_a(f(w))| \le |\varphi_{z_0}(w)|$$

$$\left| \frac{f(w)-a}{1-\bar{a}f(w)} \right| \le \left| \frac{w-z_0}{1-\bar{z}_0 w} \right|$$

$a = f(z_0)$ заменимо ω да буде z_1, а z_0 нека буде z_2

$$\Rightarrow \quad \left| \frac{f(z_1) - f(z_2)}{1 - \overline{f(z_2)} f(z_1)} \right| \leq \left| \frac{z_1 - z_2}{1 - \bar{z}_2 z_1} \right|$$, а што је управо требало доказати.

$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{D}$

Ако важи = било где (за неке $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$ у 1° или за неко $z \in \mathbb{D}$ у 2°) онда важи = у Шварцовој леми, па је $F(z) = e^{i\alpha} z$ (ротација)

$$\varphi_a \circ f \circ \varphi_{-z_0} = F \qquad / \circ \varphi_{z_0}$$

$$\varphi_{-a} \circ / \quad \varphi_a \circ f = F \circ \varphi_{z_0}$$

$$f = \varphi_{-a} \circ F \circ \varphi_{z_0}$$

$\Rightarrow f \in Aut(\mathbb{D})$ јер $\varphi_{-a}, F, \varphi_{z_0} \in Aut(\mathbb{D})$.

Обратно, ако је $f \in Aut(\mathbb{D})$ да ли је F ротација?

$f \in Aut(\mathbb{D}) \Rightarrow \varphi_a \circ f \circ \varphi_{-z_0} \in Aut(\mathbb{D}) \Rightarrow \varphi_a \circ f \circ \varphi_{-z_0} = e^{i\alpha} \varphi_b$

за $\alpha \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{D}$

Пошто је $\varphi_a(f(\varphi_{-z_0}(0))) = 0$, то је $e^{i\alpha}\varphi_b(0) = 0$ па је $\varphi_b(0) = 0$ тј. $b = 0$, па је $\varphi_b = 1_{\mathbb{D}}$

$\Rightarrow \varphi_a \circ f \circ \varphi_{-z_0} = e^{i\alpha} \cdot 1_{\mathbb{D}}$ тј. ротација

③ Нека је $\delta : \mathbb{D} \times \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ пресликавање дато са

$$\delta(z_1, z_2) = |\varphi_{z_2}(z_1)| \quad \text{за све } z_1, z_2 \in \mathbb{D}.$$

Доказати да је $(\mathbb{D}, \delta)$ метрички простор.

Доказ: $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{D}$ произвољне

$$\delta(z_1, z_2) = |\varphi_{z_2}(z_1)| \geq 0$$

$$\delta(z_1, z_2) = |\varphi_{z_2}(z_1)| = \left| \frac{z_1 - z_2}{1 - \bar{z}_2 z_1} \right| = \left| \frac{\overline{z_1 - z_2}}{\overline{1 - \bar{z}_2 z_1}} \right| = \left| \frac{\bar{z}_1 - \bar{z}_2}{1 - z_2 \bar{z}_1} \right| = |\varphi_{z_1}(z_2)| = \delta(z_2, z_1)$$

$$\delta(z_1, z_2) = 0 \iff \varphi_{z_2}(z_1) = 0 \iff z_1 = z_2$$

Остаје још да се докаже неједнакост Δ.

Докажимо: $\delta(z_1,z_2) \le \delta(z_1,z_3)+\delta(z_3,z_2)$ $(*)$

Нека је $a=\varphi_{z_3}(z_1)$ тј. $\delta(z_1,z_3)=|a|$ и $b=\varphi_{z_3}(z_2)$ тј. $\delta(z_2,z_3)=|b|$.

$(*) \iff \delta(z_1,z_2) \le |a|+|b|$

$\varphi_{z_3}\in Aut(\mathbb{D}) \underset{\text{ШПЛ}}{\overset{②}{\Longrightarrow}} \delta(z_1,z_2)=\delta(\varphi_{z_3}(z_1),\varphi_{z_3}(z_2))=\delta(a,b)$

Дакле, довољно је показати $\delta(a,b)\le |a|+|b|$

тј. $|\varphi_b(a)| = \left|\dfrac{a-b}{1-\bar b a}\right| \le |a|+|b|$

$$1-\delta(a,b)^2 = 1-|\varphi_b(a)|^2 = 1-\left|\frac{a-b}{1-\bar b a}\right|^2 = 1-\frac{a-b}{1-\bar b a}\cdot\frac{\bar a-\bar b}{1-b\bar a}$$

$$=1-\frac{|a|^2-\bar a b-a\bar b+|b|^2}{|1-\bar b a|^2} = \frac{1-\cancel{\bar b a}-\cancel{\bar a b}+|a|^2|b|^2-|a|^2+\cancel{\bar a b}+\cancel{a\bar b}-|b|^2}{|1-\bar b a|^2}$$

$$=\frac{|a|^2|b|^2-|a|^2-|b|^2+1}{|1-\bar b a|^2} \underset{\uparrow}{\ge} \frac{(1-|a|^2)(1-|b|^2)}{(1+|a||b|)^2} = \frac{1-|a|^2-|b|^2+|a|^2|b|^2+2|a||b|-2|a||b|}{(1+|a||b|)^2}$$

$|1-\bar b a| \le 1+|a||b|$

$$=\frac{(1+|a||b|)^2-(|a|+|b|)^2}{(1+|a||b|)^2} = 1-\left(\frac{|a|+|b|}{1+|a||b|}\right)^2 = 1-\delta(|a|,-|b|)^2$$

$$\Rightarrow \delta(a,b)\le\delta(|a|,-|b|)$$

тј.

$$\delta(a,b)=\left|\frac{a-b}{1-a\bar b}\right| \le \frac{|a|+|b|}{1+|a||b|} \underset{\uparrow}{\le} |a|+|b|$$

јер $1+|a||b|\ge 1$

па је тврђење доказано.

Напомена: δ се назива псеудохиперболичко растојање

ШПЛ $\Rightarrow$ Холоморфне ф-је из $\mathbb{D}$ у $\mathbb{D}$ не повећавају псеудохип. раст.

тј. $\boxed{f:\mathbb{D}\to\mathbb{D} \text{ холоморфна}, z_1,z_2\in\mathbb{D} \Rightarrow \delta(f(z_1),f(z_2))\le\delta(z_1,z_2)}$

$=$ акко $f\in Aut(\mathbb{D})$