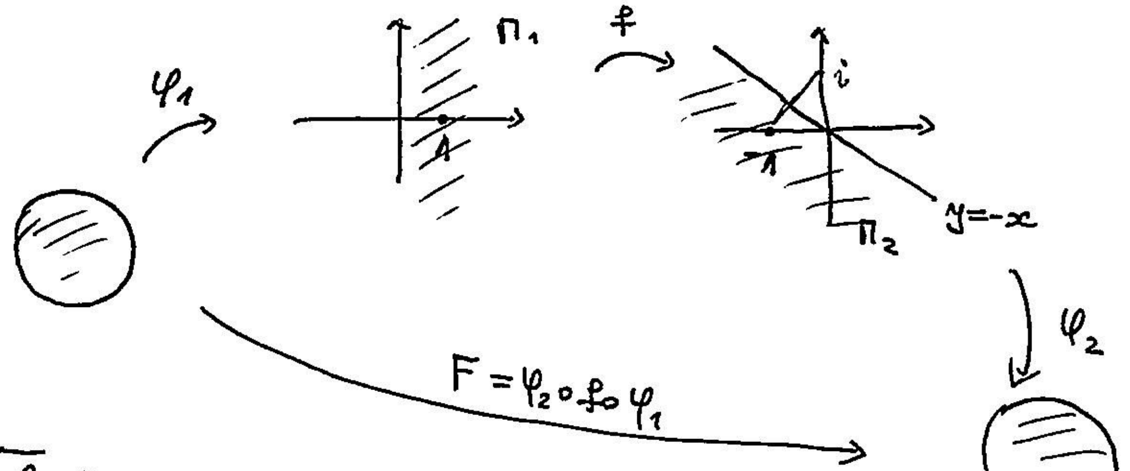
① Нека је f холоморфна функција која слика полураван $\Pi_1=\{z\in\mathbb{C} : \operatorname{Re} z>0\}$ у полураван $\Pi_2=\{z\in\mathbb{C} : \operatorname{Re} z+\operatorname{Im} z<0\}$ тако да је $f(1)=-1$. Доказати да је $|f'(1)|\le\frac{\sqrt{2}}{2}$ и да је $|f(1+2i)|\le 3+2\sqrt{2}$. Да ли може бити $f(4)=-i$?



Π_2: $x+y<0$
$x<-y$
$y<-x$

Да бисмо искористили Шварцову лему правимо композицију пресликавања F тд. $F:\mathbb{D}\to\mathbb{D}$, $F(0)=0$

φ_1: $0\longmapsto 1$
$\infty\longmapsto -1$ (због симетрије: знате из КА да билинеарно пр. слика симетричне тачке у симетричне, 0 и ∞ су симетричне у односу на кружницу, 1 и -1 су симетричне у односу на y осу)

φ_2: $-1\longmapsto 0$
$i\longmapsto\infty$ (i је симетр. са -1 у односу на праву $y=-x$)

$$\varphi_2(z)=\frac{z+1}{z-i}$$

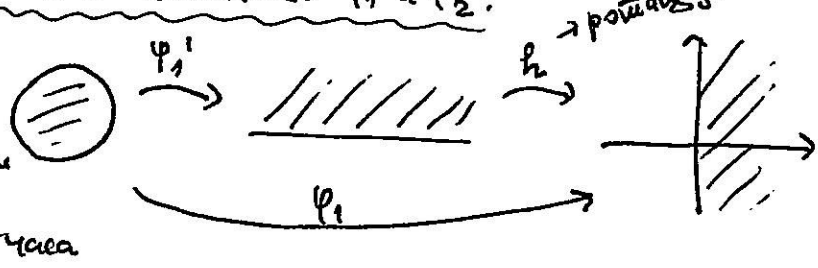
$$\varphi_1(z)=\frac{1+z}{1-z}$$

φ_1^{-1}: $1\longmapsto 0$
$-1\longmapsto\infty$ $\Rightarrow$ $\varphi_1^{-1}(\omega)=\dfrac{\omega-1}{\omega+1}=z$

$\omega=\varphi_1(z)$ $\quad \omega-1=z(\omega+1)$
$\omega(1-z)=z+1$ $\Rightarrow$ $\boxed{\omega=\dfrac{1+z}{1-z}}$

II начин за налажење φ_1 и φ_2:

поступно користити (*) са прошлог часа



$\varphi_1=h\circ\varphi_1'$

φ_1': $0\longmapsto i$
$\infty\longmapsto -i$

$\varphi_1'^{-1}$: $i\longmapsto 0$
$-i\longmapsto\infty$

$\varphi_1'^{-1}(\omega)=\dfrac{\omega-i}{\omega+i}$ (из * са прошлог часа)

$h(z)=z\cdot e^{-i\frac{\pi}{2}}$

$$\varphi_1 = h \circ \varphi_1'$$

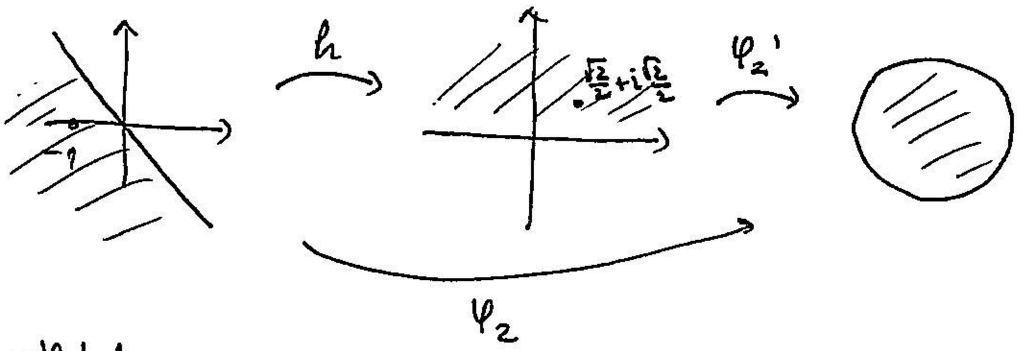
$$\varphi_1^{-1} = \varphi_1'^{-1} \circ h^{-1}$$

$$h^{-1}(z) = z \cdot e^{i\frac{\pi}{2}} = z \cdot i$$

$$\varphi_1^{-1}(\omega) = \varphi_1'^{-1}(h^{-1}(\omega))$$

$$\varphi_1^{-1}(\omega) = \varphi_1'^{-1}(\omega i) = \frac{\omega i - i}{\omega i + i} = \frac{\omega - 1}{\omega + 1} \quad \text{(исто добијамо)}$$

За φ_2:



$$\varphi_2 = \varphi_2' \circ h$$

$h(z) = z \cdot e^{-i\frac{3\pi}{4}}$ ротација за $\frac{-3\pi}{4}$

$$h(-1) = (-1) \cdot \left(\cos\tfrac{-3\pi}{4} + i \sin\tfrac{-3\pi}{4}\right) = -\left(\tfrac{-\sqrt{2}}{2} + i \cdot \tfrac{-\sqrt{2}}{2}\right) = \tfrac{\sqrt{2}}{2} + i \cdot \tfrac{\sqrt{2}}{2}$$

φ_2': $\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \mapsto 0$

$\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} \mapsto \infty$

$$\varphi_2'(z) = \frac{z - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{z - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} = \frac{z - e^{i\frac{\pi}{4}}}{z - e^{-i\frac{\pi}{4}}}$$

$$\begin{aligned}
\varphi_2(z) = \varphi_2'(h(z)) &= \varphi_2'\left(z \cdot \left(\tfrac{-\sqrt{2}}{2} - i\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) \\
&= \varphi_2'\left(-z \cdot e^{i\frac{\pi}{4}}\right) \\
&= \frac{-ze^{i\frac{\pi}{4}} - e^{i\frac{\pi}{4}}}{-ze^{i\frac{\pi}{4}} - e^{-i\frac{\pi}{4}}} \cdot \frac{-e^{i\pi/4}}{-e^{i\pi/4}} \\
&= \frac{ze^{i\pi/2} + e^{i\pi/2}}{ze^{i\pi/2} + 1} = \frac{zi + i}{zi + 1} = \frac{z+1}{z-i}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\varphi_2(z) = \frac{z+1}{z-i}}$$

(много је брже директно!)

$$F = \varphi_2 \circ f \circ \varphi_1$$

$$\varphi_2(z) = \frac{z+1}{z-i}, \quad \varphi_1(z) = \frac{1+z}{1-z}, \quad \varphi_1^{-1}(z) = \frac{z-1}{z+1}$$

$$\left.\begin{array}{l} F: \mathbb{D} \to \mathbb{D} \\ F(0) = \varphi_2(f(\varphi_1(0))) = \varphi_2(f(1)) = \varphi_2(-1) = 0 \\ F \text{ холоморфна} \end{array}\right\} \overset{\text{Шварц}}{\Longrightarrow} \begin{array}{l} |F(z)| \leq |z| \quad \forall z \in \mathbb{D} \\ |F'(0)| \leq 1 \end{array}$$

$$F'(z) = \varphi_2'(f(\varphi_1(z))) \cdot f'(\varphi_1(z)) \cdot \varphi_1'(z)$$

$$\varphi_1'(z) = \frac{1-z+1+z}{(1-z)^2} = \frac{2}{(1-z)^2} \qquad \varphi_2'(z) = \frac{z-i-z-1}{(z-i)^2} = \frac{-i-1}{(z-i)^2}$$

$$F'(0) = \varphi_2'(f(1)) \cdot f'(1) \cdot \varphi_1'(0)$$

$$F'(0) = \varphi_2'(-1) \cdot f'(1) \cdot \varphi_1'(0) = \frac{-i-1}{(-1-i)^2} \cdot f'(1) \cdot 2 = \frac{2f'(1)}{-1-i} \cdot \frac{-1+i}{-1+i}$$

$$F'(0) = \frac{2f'(1)}{1-i^2} \cdot (i-1) = (i-1) \cdot f'(1)$$

$$|F'(0)| \leq 1 \Rightarrow |(i-1) f'(1)| \leq 1$$

$$\sqrt{(-1)^2+1^2} \cdot |f'(1)| \leq 1$$

$$\boxed{|f'(1)| \leq \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$|F(z)| \leq |z|$ корисно за преостале захтеве у задатку!

Тражи се процена $f(1+2i)$

$$F(z) = \varphi_2(f(\underbrace{\varphi_1(z)}_{1+2i})), \quad \varphi_1(z) = 1+2i$$

$$\text{за } z = \varphi_1^{-1}(1+2i) = \frac{1+2i-1}{1+2i+1} = \frac{2i}{2+2i} = \frac{i}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i}$$

$$\text{за } z = \frac{i+1}{1-i^2} = \frac{1+i}{2}$$

$$\left|F\left(\frac{1+i}{2}\right)\right| \leq \left|\frac{1+i}{2}\right| \quad \text{из } |F(z)| \leq |z|$$

$$|\varphi_2(f(1+2i))| \leq \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}$$

$$\left|\frac{f(1+2i)+1}{f(1+2i)-i}\right| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow \quad |f(1+2i)+1| \le \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot |f(1+2i)-i|$$

$|f(1+2i)|-1 \le |f(1+2i)+1|$, $|f(1+2i)-i| \le |f(1+2i)|+|i|$ (Неједнакости Δ)

$|z+w| \le |z|+|w|$

$|z-w| \ge |z|-|w|$

$$\Rightarrow \quad |f(1+2i)|-1 \le \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\left(|f(1+2i)|+1\right)$$

$$|f(1+2i)|\cdot\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \le \frac{\sqrt{2}}{2}+1$$

$$|f(1+2i)| \le \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}+1}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2}+2}{2-\sqrt{2}}\cdot\frac{2+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$$

$$|f(1+2i)| \le \frac{2\sqrt{2}+4+2+2\sqrt{2}}{4-2} = \frac{6+4\sqrt{2}}{2}$$

$$\boxed{|f(1+2i)| \le 3+2\sqrt{2}}$$

Да ли може бити $f(4)=-i$?

$\underline{\underline{ПП}}$ да може тј. $f(4)=-i$

Тада нам је потребно да нађемо z за које је $\varphi_1(z)=4$, да бисмо искористили неједнакост $|F(z)|\le|z|$

$$z=\varphi_1^{-1}(4)=\frac{4-1}{4+1}=\frac{3}{5} \qquad \left|F\left(\tfrac{3}{5}\right)\right| \le \frac{3}{5} \ ?$$

$$F\left(\tfrac{3}{5}\right)=\varphi_2(f(4))=\varphi_2(-i)=\frac{-i+1}{-i-i}=\frac{1-i}{-2i}\cdot\frac{i}{i}=\frac{i-i^2}{2}=\frac{1+i}{2}$$

$$\left|F\left(\tfrac{3}{5}\right)\right|=\frac{\sqrt{2}}{2} \overset{?}{\le} \frac{3}{5}$$

$$5\sqrt{2}\le 6$$

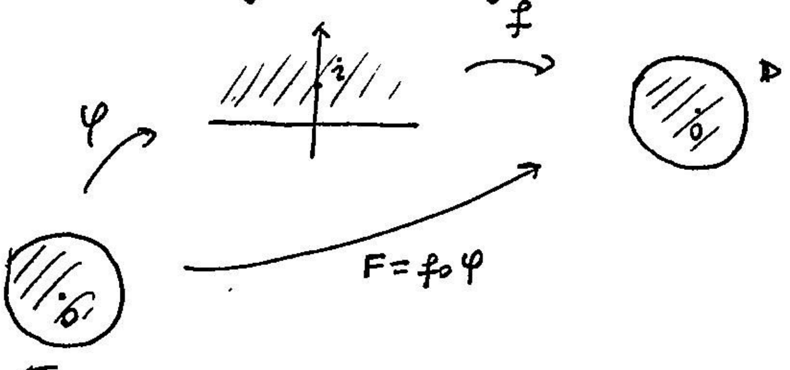
$$\sqrt{2}\le\frac{6}{5}=1{,}2$$

$$\Rightarrow\Leftarrow \quad \sqrt{2}\approx 1{,}41$$

Дакле, не може бити $f(4)=-i$.

$H=\{z\in\mathbb{C} : \operatorname{Im} z>0\}$ $\quad D=\{z\in\mathbb{C} : |z|<1\}$

(2) Нека је $f: H\to D$ аналитичка и $f(i)=0$.
Наћи највећу могућу вредност за $|f(2i)|$. За које f се достиже једнакост?



$\varphi: 0\mapsto i$
$\quad\ \infty\mapsto -i$
$\varphi^{-1}: i\mapsto 0$
$\quad\ -i\mapsto\infty$

$$\varphi^{-1}(z)=\frac{z-i}{z+i}=w$$
$$z=\varphi(w)$$
$$z-i=wz+wi$$
$$z(1-w)=i+wi$$
$$z=\frac{i+iw}{1-w}$$
$$\boxed{\varphi(w)=\frac{i+iw}{1-w}} \text{ тј. } \boxed{\varphi(z)=\frac{i+iz}{1-z}}$$

Поново намештано да F слика D у D и 0 у 0.

$F: D\to D$, $F=f\circ\varphi$

$F(0)=f(\varphi(0))=f(i)=0$

F холоморфна

$\Downarrow$ Шварцова лема

$$\begin{cases} |F(z)|\le|z| \\ |F'(0)|\le 1 \end{cases}$$

Пошто се не тражи никакво процена извода, не треба нам 2. нејд. већ само прва

$$|F(z)|\le|z|$$
$$|f(\varphi(z))|\le|z|$$

За које z је $\varphi(z)=2i$? $\quad z=\varphi^{-1}(2i)=\frac{2i-i}{2i+i}=\frac{i}{3i}=\frac{1}{3}$

Убацивањем $z=\frac{1}{3}$ у горњу неједначину

добијамо: $\boxed{|f(2i)|\le\frac{1}{3}}$

Дакле, $|f(2i)|\le\frac{1}{3}$. За које f се достиже $=$?

Ако се у Шварцовој леми достиже $=$, онда је F ротација!

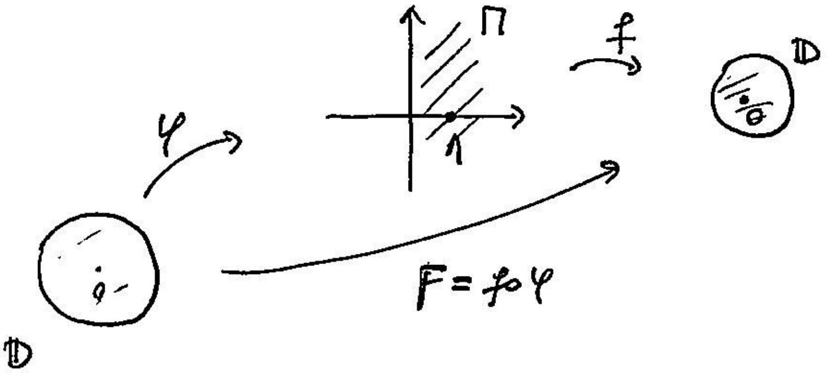
(Да би било $|f(2i)|=\frac{1}{3}$, мора бити $|F(\frac{1}{3})|=\frac{1}{3}$)

$$\Rightarrow F(z)=z\cdot e^{i\alpha}$$
$$f\circ\varphi(z)=ze^{i\alpha}, \quad \varphi(z)=w,\ z=\varphi^{-1}(w)$$
$$\Rightarrow f(w)=\varphi^{-1}(w)\cdot e^{i\alpha}=\frac{w-i}{w+i}e^{i\alpha}$$

Дакле, највећа вредност $|f(2i)|$ је $\frac{1}{3}$ и достиже се за $f(z)=\frac{z-i}{z+i}e^{i\alpha}$, $\alpha\in\mathbb{R}$

(ПРОБАЈТЕ САМИ ОВАЈ ③, ПОТПУНО СЕ ИСТО РАДИ КАО ②)

③ Нека је f холоморфна ф-ја десне полуравни $\Pi = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$ у $\mathbb{D}$ и важи $f(1)=0$. Наћи max вредности $|f(2)|$ и за које f се достиже?



$\varphi: 0 \mapsto 1$
$\quad \infty \mapsto -1$

(1 и −1 симетр. у односу на y осу)

$\varphi^{-1}: 1 \mapsto 0$
$\quad -1 \mapsto \infty$

$\varphi^{-1}(z) = \dfrac{z-1}{z+1}$ (ДИРЕКТНО)

$$\varphi^{-1}(z) = \frac{z-1}{z+1} = \omega$$
$$z - 1 = \omega(z+1)$$
$$z(1-\omega) = \omega + 1$$
$$z = \frac{\omega+1}{1-\omega}$$
$$\boxed{\varphi(\omega) = \frac{\omega+1}{1-\omega}}$$

$F = f \circ \varphi$

$F: \mathbb{D} \to \mathbb{D}$

$F(0) = f(\varphi(0)) = f(1) = 0$

F холоморфна

$\Rightarrow$ $|F(z)| \le |z|$ (ова нам треба)

Шварц $|F'(0)| \le 1$

$\Rightarrow$ $|f(\underbrace{\varphi(z)}_{2})| \le |z|$

$\varphi(z) = 2$ за $z = \varphi^{-1}(2)$

$$z = \frac{2-1}{2+1} = \frac{1}{3}$$

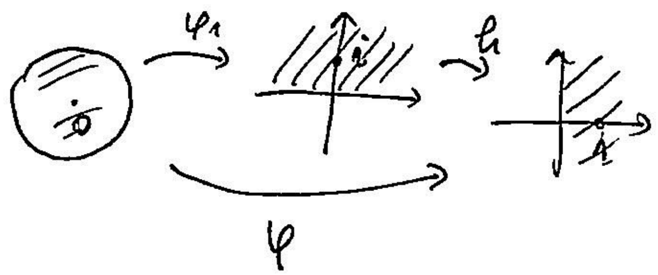
$\Rightarrow$ $|f(2)| \le \dfrac{1}{3}$

= се достиже за $F(z) = e^{i\alpha} z$ (F ротација)

$f(\varphi(z)) = e^{i\alpha} z$, $\varphi(z) = \omega$, $z = \varphi^{-1}(\omega)$

$f(\omega) = e^{i\alpha} \cdot \varphi^{-1}(\omega) \Rightarrow \boxed{f(\omega) = e^{i\alpha} \cdot \dfrac{\omega - 1}{\omega + 1}}$

II начин: (ПОСТУПНО)



$\varphi = h \circ \varphi_1$, $h(z) = z \cdot e^{-i\frac{\pi}{2}}$ ротација за $\frac{-\pi}{2}$

$\varphi_1: 0 \mapsto i$
$\quad \infty \mapsto -i$

$\varphi_1^{-1}: i \mapsto 0$
$\quad -i \mapsto \infty$

$h: i \mapsto 1$

$h^{-1}: 1 \mapsto i$

$h^{-1}(z) = z e^{i\frac{\pi}{2}} = z \cdot i$

$$\varphi_1^{-1}(z) = \frac{z-i}{z+i}$$
$$\varphi^{-1}(z) = \varphi_1^{-1}(h^{-1}(z))$$
$$\varphi^{-1}(z) = \varphi_1^{-1}(z \cdot i) = \frac{zi - i}{zi + 1} = \frac{z-1}{z+1}$$

Дакле, max је $\frac{1}{3}$ и достиже се за

$$\boxed{f(z) = e^{i\alpha} \frac{z-1}{z+1}}$$