(4) Нека је $f: \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ холоморфна функција. Доказати да важи:

$$|f(z) - f(0)| \leq 2|z| \quad \forall z \in \mathbb{D}.$$

$$|f(z)-f(0)| \leq 2|z| \iff \left|\frac{f(z)-f(0)}{2}\right| \leq |z|$$

Стога уочимо функцију $g(z) = \dfrac{f(z)-f(0)}{2}$, $z \in \mathbb{D}$.

g је холоморфна у $\mathbb{D}$ и важи $g(0) = \dfrac{f(0)-f(0)}{2} = 0$.

$$|g(z)| = \left|\frac{f(z)-f(0)}{2}\right| \leq \frac{|f(z)|+|f(0)|}{2} < \frac{1+1}{2} = 1$$

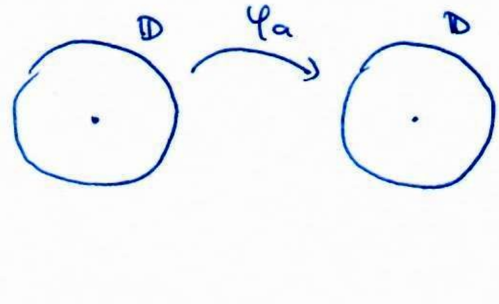
$\Rightarrow$ g слика $\mathbb{D}$ у $\mathbb{D}$ (односно кодомен је такође $\mathbb{D}$)

па можемо применити Шварцову лему на g

$\underset{\text{Шварц}}{\Rightarrow}$ $|g(z)| \leq |z|$ тј. $\left|\dfrac{f(z)-f(0)}{2}\right| \leq |z|$ што је требало и доказати.

(T1) $\mathrm{Aut}\,\mathbb{D} = \{ e^{i\alpha} \varphi_a : a \in \mathbb{D}, \alpha \in \mathbb{R} \}$ скуп свих аутоморфизама јединичног диска $\mathbb{D}$

$$\varphi_a(z) = \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$$



φ_a: $a \mapsto 0$

$\dfrac{1}{\bar{a}} \mapsto \infty$

$0 \mapsto -a$

$(\varphi_a)^{-1} = \varphi_{-a}$ (све је доказао професор!)

$$\varphi_a'(z) = \frac{1-|a|^2}{(1-\bar{a}z)^2}$$

$$\begin{cases} \varphi_a'(0) = 1-|a|^2 \\ \varphi_a'(a) = \dfrac{1}{1-|a|^2} \end{cases}$$

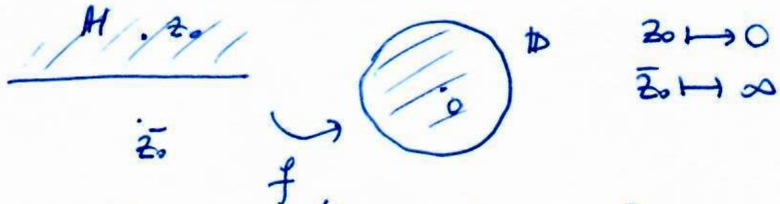
Када желимо да пресликамо диск у диск и да наместимо ситуацију тј. можемо користити лему Шварца, обично користимо φ_a или $\varphi_a^{-1} = \varphi_{-a}$.

Подсетите се билинеарних пресликавања из комплексне!

(*) $\left\{\begin{array}{l} \mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\} \text{ горња полураван} \end{array}\right.$

Сва билинеарна пресликавања која сликају $\mathbb{H}$ на $\mathbb{D}$ су облика

$$f(z) = e^{i\alpha}\,\frac{z-z_0}{z-\bar{z}_0}, \quad \alpha \in \mathbb{R},\ z_0 \in \mathbb{H}$$

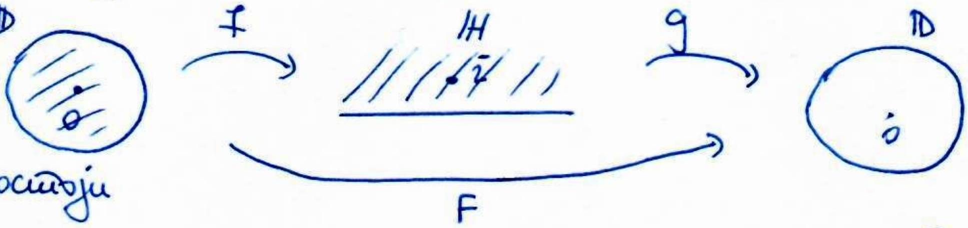


$z_0 \mapsto 0$

$\bar{z}_0 \mapsto \infty$

Ако желимо из $\mathbb{D}$ у $\mathbb{H}$, узећемо инверз од f.

(1) Да ли постоји холоморфна фја $f : \mathbb{D} \to \mathbb{H}$ тд. је $f(0) = i$, $f'(0) = 2+i$?



Пп да постоји

Да бисмо применили Шварцову лему потребно нам је пресликавање из $\mathbb{D}$ у $\mathbb{D}$ тд. се 0 слика у 0. Стога нам треба пресликавање $g : \mathbb{H} \to \mathbb{D}$ тд. композиција $g \circ f$ слика $\mathbb{D}$ у $\mathbb{D}$ и 0 у 0.

$$\left.\begin{array}{l} g : \mathbb{H} \to \mathbb{D} \\ g(i) = 0 \quad (\text{да би } g\circ f \text{ сликало } 0 \text{ у } 0) \end{array}\right\} \underset{(*)}{\Longrightarrow} \quad g(z) = \frac{z-i}{z-\bar{i}} = \frac{z-i}{z+i}$$

g је холоморфна на $\mathbb{H}$

$$\left.\begin{array}{l} F = g \circ f \\ F : \mathbb{D} \to \mathbb{D} \\ F(0) = g(f(0)) = g(i) = 0 \\ F \text{ холоморфна као композиција} \\ \quad\text{холоморфних} \end{array}\right\} \underset{\text{Шварц}}{\Longrightarrow} \quad \begin{array}{l} |F(z)| \le |z| \\ |F'(0)| \le 1 \end{array}$$

Пошто нам треба процена за f', искористићемо другу неједнакост.

$F'(z) = g'(f(z)) \cdot f'(z)$ (извод сложене фје)

$F'(0) = g'(f(0)) \cdot f'(0)$

$F'(0) = g'(i) \cdot f'(0)$

$$g'(z) = \left(\frac{z-i}{z+i}\right)' = \frac{z+i-(z-i)}{(z+i)^2} = \frac{2i}{(z+i)^2}$$

$$g'(i) = \frac{2i}{(2i)^2} = \frac{1}{2i}$$

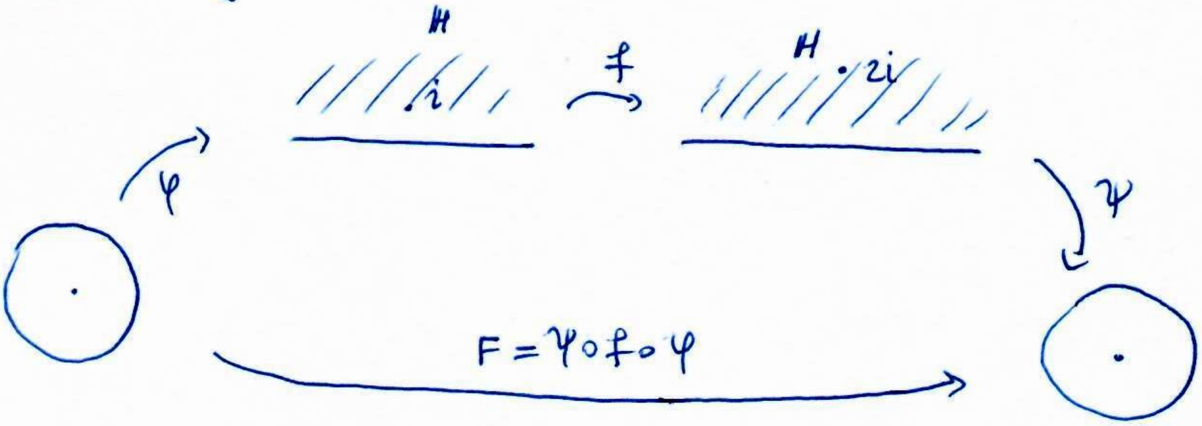
$|F'(0)| = \left|\frac{1}{2i}\cdot f'(0)\right| \le 1$

$\Rightarrow \quad |f'(0)| \le |2i| = 2$

А у задатку је $\quad |f'(0)| = \sqrt{2^2+1^2} = \sqrt{5} > 2$

$\Rightarrow$ не постоји тражена функција.

② Нека је $f:\mathbb{H}\to\mathbb{H}$ холоморфна и $f(i)=2i$. Одредити $\max|f'(i)|$. За које f се достиже max?



Да бисмо искористили лему Шварца потребно нам је пресликавање из $\mathbb{D}$ у $\mathbb{D}$ т.д. слика 0 у 0, па га конструисано!

$\varphi:\mathbb{D}\to\mathbb{H}$ $\quad$ $\psi:\mathbb{H}\to\mathbb{D}$

$\varphi(0)=i$ $\quad$ $\psi(2i)=0$ $\quad$ } што хоћемо!

(φ холоморфно на $\mathbb{D}$) $\quad$ (ψ холоморфно на $\mathbb{H}$)

Из (*) добијамо φ и ψ

$$\psi(z) = \frac{z-2i}{z-\overline{2i}} = \frac{z-2i}{z+2i} \quad (z_0 = 2i \text{ у } (*))$$

$$\varphi^{-1}(z) = \frac{z-i}{z-\bar{i}} = \frac{z-i}{z+i}$$ (тражимо инверзно од функције, $z_0=i$ у (*) јер нам треба $\varphi:\mathbb{D}\to\mathbb{H}$, па $\varphi^{-1}:\mathbb{H}\to\mathbb{D}$)

$w = \varphi^{-1}(z)$ па $\varphi(w) = z$

$$w = \frac{z-i}{z+i} = \frac{\varphi(w)-i}{\varphi(w)+i}$$

$$w(\varphi(w)+i) = \varphi(w)-i$$

$$\varphi(w)\cdot(w-1) = -i-wi$$

$$\Rightarrow \varphi(w) = \frac{-i-wi}{w-1} = \frac{i+wi}{1-w}$$

$$\varphi(w) = i\,\frac{1+w}{1-w}$$

$F: \mathbb{D} \to \mathbb{D}$, $F = \psi \circ f \circ \varphi$

$F(0) = \psi(f(\varphi(0))) = \psi(f(i)) = \psi(2i) = 0$

F холоморфна (композиција холоморф.)

$\Rightarrow$ Шварц $|F(z)| \leq |z|$, $|F'(0)| \leq 1$ (1)

$F'(z) = \psi'(f(\varphi(z))) \cdot f'(\varphi(z)) \cdot \varphi'(z)$

$F'(0) = \psi'(f(\varphi(0))) \cdot f'(\varphi(0)) \cdot \varphi'(0)$

$F'(0) = \psi'(f(i)) \cdot f'(i) \cdot \varphi'(0)$

$\psi(z) = \frac{z-2i}{z+2i}$

$\varphi(z) = i\frac{1+z}{1-z}$

$\varphi'(z) = i \cdot \frac{1-z+1+z}{(1-z)^2} = \frac{2i}{(1-z)^2}$, $\psi'(z) = \frac{z+2i-(z-2i)}{(z+2i)^2} = \frac{4i}{(z+2i)^2}$

$F'(0) = \psi'(2i) \cdot f'(i) \cdot \varphi'(0)$

$F'(0) = \frac{4i}{(2i+2i)^2} \cdot f'(i) \cdot \frac{2i}{(1-0)^2} = \frac{\cancel{4i}}{(4i)^{\cancel{2}}} \cdot f'(i) \cdot 2i = \frac{f'(i)}{2}$

$|F'(0)| \leq 1 \Rightarrow \left|\frac{f'(i)}{2}\right| \leq 1$

$$\boxed{|f'(i)| \leq 2}$$

Дакле, max је 2 и достиже се када је испуњена једнакост у неједнакости Шварца (1) тј. када је F ротација, $\underline{F(z) = e^{i\alpha} z}$.
$\alpha \in \mathbb{R}$

$\psi \circ f \circ \varphi = F$

$\psi(f(\varphi(z))) = e^{i\alpha} z$

$f(\varphi(z)) = \psi^{-1}(e^{i\alpha} z)$

$\varphi(z) = w$: $f(w) = \psi^{-1}(e^{i\alpha} \cdot \varphi^{-1}(w))$

$f(w) = \psi^{-1}\left(e^{i\alpha} \cdot \frac{w-i}{w+i}\right)$

$f(w) = 2i \frac{e^{i\alpha} \frac{w-i}{w+i} + 1}{1 - e^{i\alpha} \frac{w-i}{w+i}}$

$$\boxed{f(w) = 2i \frac{e^{i\alpha}(w-i) + w + i}{w + i - e^{i\alpha}(w-i)}}$$

$\psi^{-1}(z) = ?$

$\psi(z) = \frac{z-2i}{z+2i} = w$

$z - 2i = (z+2i)w$

$z(1-w) = 2i(w+1)$

$z = \frac{2i(w+1)}{1-w} = \psi^{-1}(w)$

$$\boxed{\psi^{-1}(z) = 2i\frac{z+1}{1-z}}$$

Нпр. за $\alpha = 0$:

$f(w) = 2i \frac{2w}{2i} = 2w$

У претходном задатку се могло десити да се тражи и процена за $|f(z)|$.
Тада користимо неједнакост $|F(z)| \leq |z|$ и користимо неједнакости $\triangle$
$\left(|w+z| \leq |w|+|z| \text{ и } \big||w|-|z|\big| \leq |w-z| \right)$.

$$|F(z)| \leq |z|$$

$$|\psi \circ f \circ \varphi(z)| \leq |z|$$

$$\varphi(z) = w$$

$$z = \varphi^{-1}(w)$$

$$|\psi(f(w))| \leq |\varphi^{-1}(w)|$$

$$\left|\frac{f(w)-2i}{f(w)+2i}\right| \leq \left|\frac{w-i}{w+i}\right| \qquad (2)$$

$$\big||f(w)|-2\big||w+i| \leq |f(w)-2i|\cdot|w+i| \leq |f(w)+2i||w-i| \leq \left(|f(w)|+2\right)\left(|w-i|\right)$$

$\big||f(w)|-2\big|\,|w+i| \leq \left(|f(w)|+2\right)|w-i|$ доста је груба неједнакост ал може да послужи.

Нпр. ако је питање да ли може бити $f(2i) = \frac{i}{2}$ онда убацимо $w = 2i$ и добијамо:

$$\left|\left|\frac{i}{2}\right|-2\right|\,|2i+i| \leq \left|\left|\frac{i}{2}\right|+2\right|\cdot|2i-i|$$

$$\frac{3}{2}\cdot 3 \leq \frac{5}{2}\cdot 1$$

$\frac{9}{2} \leq \frac{5}{2}$ $\lightning$ дакле, не може бити $f(2i) = \frac{i}{2}$.

(Ово можемо добити и убацивањем у (2)) али што ради иллустрације овде наводим

(Биће задатака где ће нам требати ове процене)