$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$
јединични диск

Шварцова лема и аутоморфизми јединичног диска

Лема 1 (Шварц): Нека је $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ холоморфна ф-ја и $f(0) = 0$. Тада важи:

1° $|f(z)| \leq |z|$ $\forall z \in \mathbb{D}$

2° $|f'(0)| \leq 1$

Осим тога, важи једнакост у 1° за неко $z \in \mathbb{D}$ или важи једнакост у 2° ако и само ако је f ротација, односно $f(z) = e^{i\alpha} z$, $\forall z \in \mathbb{D}$ и неко $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Нека је $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ холоморфна ф-ја и $f(0) = 0$. Доказати:

$$(\forall z \in \mathbb{D}) \quad |f(z) + f(-z)| \leq 2|z|^2.$$

Применом Шварцове леме на ф-ју f добијамо $|f(z)| \leq |z|$, $\forall z \in \mathbb{D}$, па је и $|f(-z)| \leq |-z| = |z| \Rightarrow |f(z) + f(-z)| \leq |z| + |z| = 2|z|$

$$\Rightarrow \left|\frac{f(z) + f(-z)}{2}\right| \leq |z|$$

Посматрајмо зато ф-ју:

$$g(z) = \frac{f(z) + f(-z)}{2}, \quad z \in \mathbb{D}$$

g је холоморфна на $\mathbb{D}$ $\Rightarrow g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$

$$\left.\begin{aligned} g(0) &= 0 \\ g'(0) &= \frac{f'(0) - f'(0)}{2} = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} g(0) &= c_0 = 0 \\ g'(0) &= c_1 = 0 \end{aligned} \Rightarrow g(z) = c_2 z^2 + \ldots$$

Добили смо горе $|g(z)| \leq |z|$, па је $\left|\frac{g(z)}{z}\right| \leq 1$, $z \neq 0$.

Дефинишимо нову функцију:

$$h(z) = \begin{cases} \frac{g(z)}{z}, & z \neq 0 \\ 0, & z = 0 \end{cases} \quad (z \in \mathbb{D})$$

Пошто је $g(z) = c_2 z^2 + c_3 z^3 + \ldots$

$$g(z) = z(c_2 z + c_3 z^2 + \ldots)$$

$$\frac{g(z)}{z} = c_2 z + c_3 z^2 + \ldots \quad \text{за } z \neq 0$$

Кад дефинишемо h као горе, важи $h(z) = c_2 z + c_3 z^2 + \ldots$, $\forall z \in \mathbb{D}$, па је h холоморфна.

Дакле h је холоморфна, $h: \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ јер $|h(z)| < 1$ (у * је $|h(z)| \le 1$, али не може важити $=$ јер је h отворено па је $h(\mathbb{D})$ отворен (Т.о отвореном пресликавању) $h(\mathbb{D}) \subseteq \overline{\mathbb{D}}$ $\Rightarrow h(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{D}$)

h неконстантно претпостављано, иначе је тривијално

$h(0) = 0$ (по деф.) $\underset{\text{Шварц}}{\Rightarrow}$ $|h(z)| \le |z|$

$$\Rightarrow \left|\frac{g(z)}{z}\right| \le |z|$$

$$\Rightarrow |g(z)| \le |z|^2$$

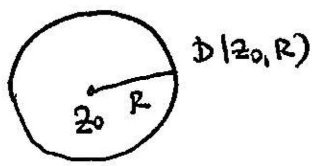
$$\Rightarrow \left|\frac{f(z)+f(-z)}{2}\right| \le |z|^2$$

$$\Rightarrow |f(z)+f(-z)| \le 2|z|^2.$$

(2) Нека је функција f холоморфна у диску $D(z_0,R) = \{z \in \mathbb{C} : |z-z_0| < R\}$, при чему важи $f(z_0) = 0$ и $|f(z)| \le M$ за све $z \in D(z_0,R)$, где је $z_0 \in \mathbb{C}$, $R, M > 0$. Доказати да важи:

1) $|f'(z_0)| \le \frac{M}{R}$

2) $|f(z)| \le \frac{M|z-z_0|}{R}$, $\forall z \in D(z_0,R)$.



С обзиром да се тражи процена извода у центру круга и процена модула $|f(z)|$, тражено доста личи на тврђење у Шв.леми! Код Шварца се ради о јединичном кругу са центром 0 и полупречником 1, па треба некако да сведемо на тај случај. ← (размишљање)

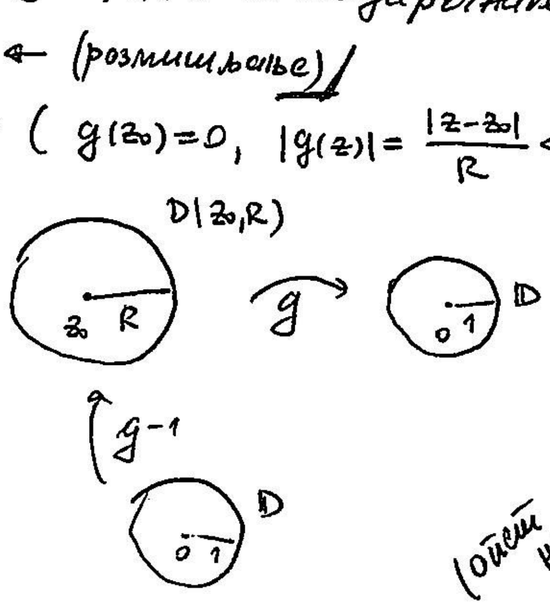
ф-ја $g(z) = \frac{z-z_0}{R}$ слика $D(z_0,R)$ на $\mathbb{D}$ ($g(z_0) = 0$, $|g(z)| = \frac{|z-z_0|}{R} < \frac{R}{R} = 1$)

$g(z) = w \rightsquigarrow g^{-1}(w) = z$

$z - z_0 = Rw$

$z = Rw + z_0$

$g^{-1}(w) = Rw + z_0$ $\quad g^{-1}: \mathbb{D} \to D(z_0,R)$

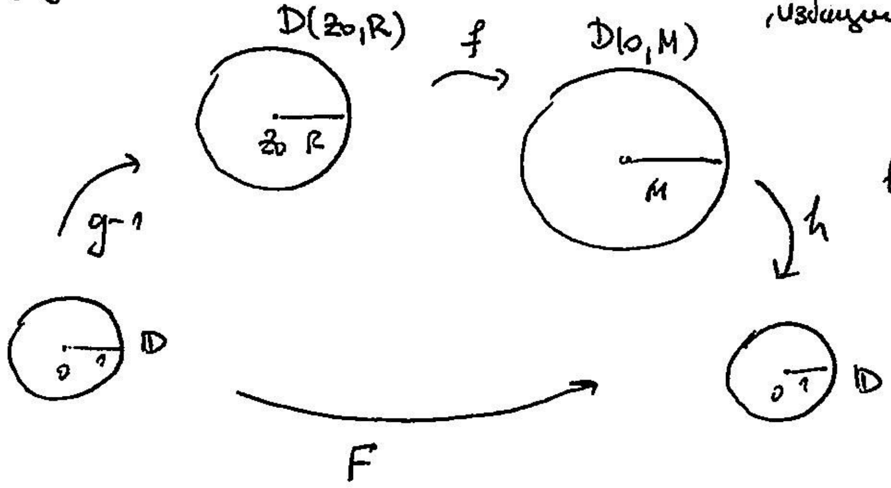


Пошто знамо $|f(z)| \le M$, то је $\left|\frac{f(z)}{M}\right| \le 1$

т). ф-ја $\frac{f(z)}{M}$ слика $D(z_0,R)$ у $\overline{\mathbb{D}}$ (тачније, биће опет $\mathbb{D}$ јер је $\frac{f}{M}$ холоморфно, па и отворено! (опет $\frac{f}{M}$ неконст.)

кодомен од f је подскуп од $D(0,M)$ због услова $|f(z)|\le M$
(f холом, неконст, па можемо избацити $=$)

Посматрајмо сада дијаграм:



$h(\omega)=\dfrac{\omega}{M}$
Хомотетија

$F = h\circ f\circ g^{-1}$, $F:\mathbb{D}\to\mathbb{D}$ (хтели смо да сведемо на Шв.лему)

$$F(0)=h(f(g^{-1}(0)))=h(f(z_0))=\frac{f(z_0)}{M}=\frac{0}{M}=0$$

F је холоморфна као композиција холоморфних ф-ја

$\Longrightarrow$ $|F(z)|\le|z|$

Шварц $|F'(0)|\le 1$

$$F(z)=h(f(g^{-1}(z)))=h(f(Rz+z_0))=\frac{f(Rz+z_0)}{M}$$

$|F(z)|\le|z|$ даје $|f(Rz+z_0)|\le M|z|$

означимо $Rz+z_0=\omega$

па је $z=\dfrac{\omega-z_0}{R}$ $\Rightarrow$ $|f(\omega)|\le M\cdot\dfrac{|\omega-z_0|}{R}$

тј. $\boxed{|f(z)|\le\dfrac{M|z-z_0|}{R}}$

$$F'(z)=\frac{1}{M}\cdot f'(Rz+z_0)\cdot R$$

$$F'(0)=\frac{1}{M}f'(z_0)\cdot R$$

$|F'(0)|\le 1$ даје $\boxed{|f'(z_0)|\le\dfrac{M}{R}}$

[Ко је увежбан може одмах да уочи ф-ју $\dfrac{f(Rz+z_0)}{M}$. Овде је постепено изведена.]

③ Нека је $n\in\mathbb{N}$ и $f:\mathbb{D}\to\mathbb{D}$ холоморфна ф-ја, при чему важи:

$$f(0)=f'(0)=\ldots=f^{(n-1)}(0)=0$$

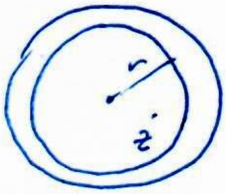
Доказати да је $|f(z)|\le|z|^n,\ \forall z\in\mathbb{D}$.

Тејлоров развој за f: $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kz^k,\ z\in\mathbb{D}$, $a_k=\dfrac{f^{(k)}(0)}{k!},\ k\in\mathbb{N}_0$

Из услова задатка следи да је $a_0=a_1=\ldots=a_{n-1}=0$

$$\Rightarrow f(z)=\sum_{k=n}^{\infty}a_kz^k=a_nz^n+a_{n+1}z^{n+1}+\ldots$$

$$=z^n(\underbrace{a_n+a_{n+1}z+\ldots}_{g(z)})$$



$$g(z)=\begin{cases}\dfrac{f(z)}{z^n}, & z\ne0\\ a_n, & z=0\end{cases}$$

g је холоморфна на $\mathbb{D}$ (јер је представљена конв. степеним редом)

Нека је $z\in\mathbb{D}$ произвољна фиксирана тачка и нека је $|z|<r<1$.

На основу ПММ (принцип максимума модула) важи:

$$|g(z)|\le\max_{\overline{D}(0,r)}|g|\overset{\text{ПММ}}{=}\max_{\partial D(0,r)}|g|=\max_{\xi\in\partial D(0,r)}\frac{|f(\xi)|}{|\xi|^n}\le\frac{1}{r^n}$$

($\xi\in\partial D(0,r)$, па је $|\xi|=r$)

($|f(\xi)|<1$ јер $f:\mathbb{D}\to\mathbb{D}$)

Сада преласком на граничну вредност $r\to1^-$ добијамо $|g(z)|\le1$

$$\Rightarrow |f(z)|=|z^ng(z)|\le|z|^n.$$

Напомена: Приметите да доказ имитира доказ Шварцове лем

Овај задатак представља уопштење Шварцове леме.