(T1) Постоји K-квазиконформно пресликавање $f: R \to R'$ акко је

$$\frac{1}{K} \leq \frac{M(R')}{M(R)} \leq K$$ где је $M(R)$ модул правоугаоника R.

Модул се дефинише као количник страница : $M(R) = \frac{a}{b}$

(a страна је на x оси, b на y оси, прав. R транслирано и ротирано да буде у том положају)

(T2) $f: \Omega \to \Omega'$ регуларно K_1-квазиконф.
$g: \Omega' \to \Omega''$ регуларно K_2-квазиконф.
$\Rightarrow$ $g \circ f : \Omega \to \Omega''$ је регуларно $K_1 K_2$-квазиконформно.

(покаже се : $D_{g \circ f} \leq D_g \cdot D_f$)

(T3) Инверз K-квазиконформног је K-квазиконформно пр.

(покаже се : $D_{f^{-1} \circ f} = D_f$)

Екстремалне дужине

* $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ области
* Γ фамилија кривих у Ω тако да : свако $\gamma \in \Gamma$ је пребројива унија отворених лукова, затворених лукова и затворених кривих тако да је сваки затворен подлук локално ректифицијабилан
* $\rho : \Omega \to \mathbb{R}$ се назива допустива метрика ако важи:
  1) $\rho(z) \geq 0 \quad \forall z \in \Omega$
  2) ρ је Борел мерљива
  3) $\iint\limits_{\Omega} \rho^2(z)\,dx\,dy \in (0, +\infty)$
     $\|$
     $A(\rho)$ (ρ површина)
* $L(\gamma, \rho) = \int\limits_{\gamma} \rho(z)\,|dz|$ (ρ дужина)

$L(\Gamma, \rho) = \inf\limits_{\gamma \in \Gamma} L(\gamma, \rho)$ најмања ρ дужина у Γ

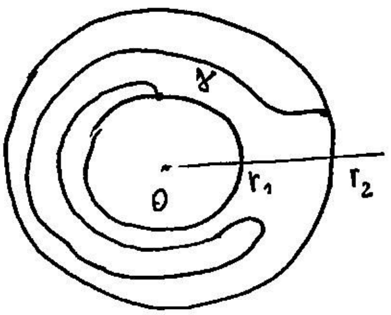
дефиниција:

$$\lambda(\Gamma) = \sup_{\rho} \frac{L(\Gamma, \rho)^2}{A(\rho)}$$

(sup по свим допустивим ρ)

λ се назива екстремална дужина фамилије кривих Γ

① Нека је $\Omega=\{z\in\mathbb{C} : r_1<|z|<r_2\}$, $0<r_1<r_2<+\infty$ и нека је Γ фамилија кривих које спајају $\partial D(0,r_1)$ и $\partial D(0,r_2)$. Наћи $\lambda(\Gamma)$.



$\gamma\in\Gamma$, $|\gamma(0)|=r_1$, $|\gamma(1)|=r_2$

$C_1=\partial D(0,r_1)$

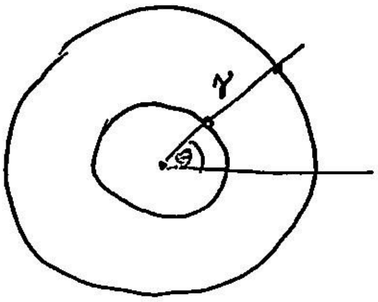
$C_2=\partial D(0,r_2)$

$$\lambda(\Gamma)=\sup_{\rho}\frac{L(\Gamma,\rho)^2}{A(\rho)}$$

$$A(\rho)=\iint_{\Omega}\rho^2\,dx\,dy\ ,\quad L(\Gamma,\rho)=\inf_{\gamma\in\Gamma}\int_{\gamma}\rho(z)|dz|$$

$L(\Gamma,\rho)\le\int_{\gamma}\rho(z)|dz|$ за било које фиксирано $\gamma\in\Gamma$

Нека је γ дуж која спаја C_1 и C_2



$\gamma=\gamma_\theta$ тј. $\gamma_\theta(r)=re^{i\theta}$, $r_1<r<r_2$

$$\int_{\gamma}\rho(z)|dz|=\int_{r_1}^{r_2}\rho(re^{i\theta})\,|e^{i\theta}|\,dr$$

$$=\int_{r_1}^{r_2}\rho(re^{i\theta})\,dr$$

$$\boxed{\begin{gathered}A(\rho)=\iint_{\Omega}\rho^2\,dx\,dy\\ x=r\cos\theta\quad J=r\\ y=r\sin\theta\\ A(\rho)=\iint_{\Omega'}\rho^2(re^{i\theta})\cdot r\,dr\,d\theta\\ \Omega'=[r_1,r_2]\times[0,2\pi]\end{gathered}}$$

$$L(\Gamma,\rho)\le\int_{r_1}^{r_2}\rho(re^{i\theta})\,dr\qquad\Big/\int_0^{2\pi}d\theta$$

$$2\pi\,L(\Gamma,\rho)\le\int_0^{2\pi}\left(\int_{r_1}^{r_2}\rho(re^{i\theta})\,dr\right)d\theta=\iint_{[r_1,r_2]\times[0,2\pi]}\rho(re^{i\theta})\,dr\,d\theta\qquad\Big/^2$$

$$4\pi^2L(\Gamma,\rho)^2\le\left(\iint_{\Omega'}\rho(re^{i\theta})\,dr\,d\theta\right)^2\underset{\text{КШ}}{\le}\iint_{\Omega'}\frac{1}{r}\,dr\,d\theta\cdot\iint_{\Omega'}r\rho^2(re^{i\theta})\,dr\,d\theta$$

$\frac{1}{\sqrt r}$ и $\sqrt r\,\rho$

$$4\pi^2L(\Gamma,\rho)^2\le\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r}\cdot2\pi\cdot A(\rho)=2\pi\ln\frac{r_2}{r_1}\cdot A(\rho)$$

$$\Rightarrow\ \frac{L(\Gamma,\rho)^2}{A(\rho)}\le\frac{\ln\frac{r_2}{r_1}}{2\pi}\qquad\Big/\sup_{\rho}$$

$$\Rightarrow\ \boxed{\sup_{\rho}\frac{L(\Gamma,\rho)^2}{A(\rho)}\le\frac{1}{2\pi}\ln\frac{r_2}{r_1}}\quad\text{тј.}\quad\boxed{\lambda(\Gamma)\le\frac{1}{2\pi}\ln\frac{r_2}{r_1}}$$

Када се достиже једнакост?

$= $ у КШ се достиже за $\rho = \frac{1}{r}$ $\left(\frac{1}{\sqrt{r}} = c\cdot\sqrt{r}\,\rho \Rightarrow \rho = \frac{1}{r}\cdot\frac{1}{c},\ c = const. \right)$

узмимо $\rho_0(z) = \frac{1}{r} = \frac{1}{|z|}$ (за $z = re^{i\theta}$)

$$L(\Gamma,\rho_0) = \inf_{\gamma\in\Gamma} \int_\gamma \rho_0(z)|dz|$$

$$\int_\gamma \rho_0(z)|dz| = \int_\gamma \frac{|dz|}{|z|} = \int_0^1 \frac{|\gamma'(t)|}{|\gamma(t)|}dt$$

Покажимо: $|\gamma'(t)| \geq |\gamma(t)|'$

$\gamma(t) = \alpha(t) + i\beta(t)$ $\qquad |\gamma(t)| = \sqrt{\alpha^2(t)+\beta^2(t)}$

$\gamma'(t) = \alpha'(t) + i\beta'(t)$ $\qquad |\gamma(t)|' = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}(2\alpha\alpha'(t) + 2\beta\beta'(t))$

$|\gamma'(t)| = \sqrt{\alpha'(t)^2 + \beta'(t)^2}$

$$\sqrt{(\alpha'(t))^2 + (\beta'(t))^2} \geq \frac{\alpha\alpha' + \beta\beta'}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$$

$$\sqrt{\alpha'^2+\beta'^2} \geq \frac{\alpha\alpha' + \beta\cdot\beta'}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} \qquad \alpha\alpha' + \beta\beta' \leq \sqrt{\alpha^2+\beta^2}\sqrt{\alpha'^2+\beta'^2}$$

коши шварц

$$\Rightarrow \int_\gamma \rho_0(z)|dz| = \int_0^1 \frac{|\gamma'(t)|}{|\gamma(t)|}dt \geq \int_0^1 \frac{|\gamma(t)|'}{|\gamma(t)|}dt \quad \left(\begin{array}{l}\text{смена}\\ u = |\gamma(t)| \\ du = |\gamma(t)|'dt\end{array}\right)$$

$$= \int_{|\gamma(0)|}^{|\gamma(1)|} \frac{du}{u} = \ln u\Big|_{r}^{r_2} = \ln\frac{r_2}{r_1}$$

$$\Rightarrow L(\Gamma,\rho_0) = \inf_{\gamma\in\Gamma}\int_\gamma \rho_0(z)|dz| \geq \ln\frac{r_2}{r_1}$$

(смена пр. $\Omega' = [r_1,r_2]\times[0,2\pi]$, $J = r$)

$$A(\rho_0) = \iint_\Omega \rho_0^2\,dx\,dy = \iint_\Omega \frac{1}{|z|^2}dx\,dy = \iint_{\Omega'} \frac{1}{r^2}\cdot r\,dr\,d\theta = 2\pi \ln r\Big|_{r_1}^{r_2}$$

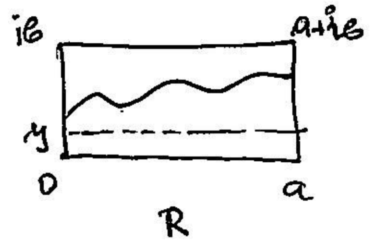
$$= 2\pi\ln\frac{r_2}{r_1}$$

$$\frac{L(\Gamma,\rho_0)^2}{A(\rho_0)} \geq \frac{\ln^2\frac{r_2}{r_1}}{2\pi\ln\frac{r_2}{r_1}} = \frac{\ln\frac{r_2}{r_1}}{2\pi}$$

Дакле,
$\lambda(\Gamma) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{r_2}{r_1}$

$$\Rightarrow \sup_\rho \frac{L(\Gamma,\rho)^2}{A(\rho)} \geq \frac{1}{2\pi}\ln\frac{r_2}{r_1} \quad \text{тј.} \quad \boxed{\lambda(\Gamma) \geq \frac{1}{2\pi}\ln\frac{r_2}{r_1}}$$

② Нека је Γ скуп свих лукова у $\bar{R}$ који спајају пар наспрамних b страница (R је правоугаоник). Наћи $\lambda(\Gamma)$.



$$\lambda(\Gamma) = \sup_{\rho} \frac{L(\Gamma,\rho)^2}{A(\rho)}$$

$$L(\Gamma,\rho) = \inf_{\gamma\in\Gamma} \int_\gamma \rho(z)|dz|$$

$$A(\rho) = \iint_R \rho^2 dx dy$$

Ако је γ_y дуж која спаја b стране, $\gamma_y(x) = x+iy$, $x\in(0,a)$.

$$\int_\gamma \rho(z)|dz| \geqslant L(\Gamma,\rho)$$

$$\int_0^a \rho(x+iy)dx \geqslant L(\Gamma,\rho) \qquad / \int_0^b dy$$

$$\int_0^b\left(\int_0^a \rho(x+iy)\,dx\right)dy \geqslant b\cdot L(\Gamma,\rho)$$

$$\parallel$$

$$\iint_{[0,a]\times[0,b]} \rho(x+iy)\,dxdy \geqslant b\,L(\Gamma,\rho) \quad /^2$$

$$\left(\iint_R \rho(x+iy)\,dxdy\right)^2 \geqslant b^2 L^2(\Gamma,\rho)$$

$$\left(\iint_R \rho(x+iy)dxdy\right)^2 \overset{КШ}{\leq} \iint_R \rho^2(x+iy)\,dxdy \cdot \iint_R 1\,dxdy = ab\cdot A(\rho)$$

$$\Rightarrow \quad b^2L^2(\Gamma,\rho) \leq ab\,A(\rho)$$

$$\frac{L^2(\Gamma,\rho)}{A(\rho)} \leq \frac{a\cancel{b}}{b^{\cancel{2}}} = \frac{a}{b} \qquad / \sup_\rho$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\lambda(\Gamma) \leq \frac{a}{b}}$$

Једнакост у КШ:

за $\rho=1$

$$A(1) = ab$$

$$L(\Gamma,1) = \inf_{\gamma\in\Gamma}\int_\gamma |dz| = \inf_{\gamma\in\Gamma} l(\gamma) = a$$

$$\Rightarrow \quad \frac{L(\Gamma,\rho)^2}{A(\rho)} = \frac{a^2}{ab} = \frac{a}{b} \quad \text{за } \rho=1$$

$$\Rightarrow \quad \sup_\rho \frac{L(\Gamma,\rho)^2}{A(\rho)} \geqslant \frac{a}{b}$$

Дакле, $\boxed{\lambda(\Gamma) = \frac{a}{b}}$