7) На граници ∂D_1:

$$|h(z)| = |330z+400+(z+1)^7| \geqslant |330z+400| - |z+1|^7$$
$$= \underbrace{|330(z-1)+730|}_{\geqslant 620} - \underbrace{|z-1+2|^7}_{\leq \left(\frac{7}{3}\right)^7} \geqslant 620 - 504 > 0$$

$\Rightarrow$ h нема нула на ∂D_1.

$\Rightarrow$ Број нула у области V ф-је h је $7-1-0-0=6$.

⑤ Нека је $0<r<1<R$. Доказати да постоји $\varepsilon>0$ тако да полином $p(z)=\varepsilon z^7+z^2+1$ има тачно 5 нула у прстену
$$A=\{z\in\mathbb{C} : r\varepsilon^{-\frac{1}{5}}<|z|<R\varepsilon^{-\frac{1}{5}}\} = \underbrace{D(0,R\varepsilon^{-\frac{1}{5}})}_{D_1} \setminus \underbrace{\overline{D}(0,r\varepsilon^{-\frac{1}{5}})}_{D_2}$$

1) $f(z)=\varepsilon z^7$, $g(z)=z^2+1$ холоморфне на $\mathbb{C}$, $\overline{D}_1 \subseteq \mathbb{C}$

$|f(z)| = \varepsilon|z|^7 = \varepsilon(R\varepsilon^{-\frac{1}{5}})^7 = R^7\cdot\varepsilon^{-\frac{2}{5}}$ на ∂D_1

$|g(z)| = |z^2+1| \leq |z|^2+1 = R^2\varepsilon^{-\frac{2}{5}}+1$ на ∂D_1

треба да важи $R^2\varepsilon^{-\frac{2}{5}}+1 < R^7\varepsilon^{-\frac{2}{5}}$, тј. $\varepsilon^{\frac{2}{5}}<R^7-R^2$

Тада на основу Рушеове т. f и $f+g=p$ имају једнак број нула у D_1 (7)

2) $f(z)=z^2$, $g(z)=\varepsilon z^7+1$ холоморфне на $\mathbb{C}$, $\overline{D}_2 \subseteq \mathbb{C}$

$|f(z)| = |z|^2 = r^2\varepsilon^{-\frac{2}{5}}$ на ∂D_2

$|g(z)| = |\varepsilon z^7+1| \leq \varepsilon|z|^7+1 = \varepsilon\cdot r^7\varepsilon^{-\frac{7}{5}}+1 = r^7\varepsilon^{-\frac{2}{5}}+1$ на ∂D_2

треба да важи $r^7\varepsilon^{-\frac{2}{5}}+1<r^2\varepsilon^{-\frac{2}{5}}$ тј. $\varepsilon^{\frac{2}{5}}<r^2-r^7$

Тада на основу Рушеове т. f и $f+g=p$ имају једнак бр. нула у D_2 (2)

Дакле, ако узмемо $\varepsilon>0$ тд. је $\varepsilon^{\frac{2}{5}}<\min\{r^2-r^7, R^7-R^2\}$ важиће да p има 7 нула у D_1 и 2 нуле у D_2,

дакле $7-2=5$ нула у A.

(Треба проверити и границу ∂D_2:

$|p(z)| = |\varepsilon z^7+z^2+1| \geqslant |z^2| - |\varepsilon z^7+1| > r^2\varepsilon^{-\frac{2}{5}} - r^7\varepsilon^{-\frac{2}{5}} - 1$
$= \varepsilon^{-2/5}(r^2-r^7-\varepsilon^{2/5}) > 0 \Rightarrow p$ нема нула на ∂D_2)

Оправдајмо зашто постоји $\varepsilon > 0$ тд. $\varepsilon^{\frac{2}{5}} < \min\{r^2-r^7, R^7-R^2\}$:

Пошто је $0<r<1<R$ то је $r^2-r^7 = r^2(1-r^5) > 0 \quad (r^5<1)$

$$R^7-R^2 = R^2(R^5-1) > 0 \quad (R^5>1)$$

$$\Rightarrow \min\{r^2-r^7, R^7-R^2\} = a > 0$$

$$\varepsilon < a^{\frac{5}{2}}$$

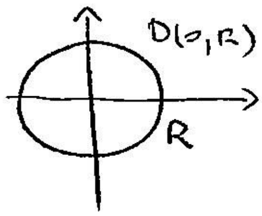
нпр. $\varepsilon = \frac{1}{2}\cdot a^{\frac{5}{2}}$ задовољава услов!

---

⑥ Нека је $n \in \mathbb{N}$ и $c_0, c_1, \dots, c_{n-1} \in \mathbb{C}$ Доказати да све нуле полинома $p(z) = z^n + c_{n-1}z^{n-1} + \dots + c_1 z + c_0$, припадају отвореном диску са центром 0, полупречника

$$R = \sqrt{1 + |c_{n-1}|^2 + \dots + |c_1|^2 + |c_0|^2}$$

$f(z) = z^n$



$g(z) = p(z) - z^n = c_{n-1}z^{n-1} + \dots + c_1 z + c_0$

f, g холоморфне на $\mathbb{C}$; $\overline{D}(0,R) \subseteq \mathbb{C}$

$|f(z)| = R^n$ на $\partial D(0,R)$ $\qquad R^2 = \sum_{j=0}^{n-1}|c_j|^2 + 1$

$$|g(z)| = \left|\sum_{j=0}^{n-1} c_j z^j\right| \leq \sqrt{\sum_{j=0}^{n-1}|c_j|^2 \cdot \sum_{j=0}^{n-1}|z|^{2j}} \quad \text{(КОШИ-ШВАРЦ)}$$

$$= \sqrt{\sum_{j=0}^{n-1}|c_j|^2 \cdot \sum_{j=0}^{n-1} R^{2j}} \quad \text{за } z \in \partial D(0,R)$$

$$= \sqrt{(R^2-1)\cdot\frac{(R^2)^n-1}{R^2-1}} = (R^{2n}-1)^{\frac{1}{2}}$$

$(R^{2n}-1)^{\frac{1}{2}} < R^n \quad \boxed{?}$

$R^{2n}-1 < R^{2n}$ ✓ Дакле важи $|g(z)| < |f(z)|$ на $\partial D(0,R)$

$\underset{\text{Руше}}{\Rightarrow}$ f и $f+g = p$ имају једнак број нула у $D(0,R)$

f има n нула

$\Rightarrow$ p има n нула у $D(0,R)$, тј. све нуле су у $D(0,R)$.

(7') Ако је $f(z)=\dfrac{z(2z-1)}{2-z}$ доказати $f(\mathbb{D})=\mathbb{D}$, где је $\mathbb{D}=\{z\in\mathbb{C}:|z|$

за $z=e^{it}$ је $|f(z)|=\left|\dfrac{z(2z-1)}{2-z}\right|=\left|\dfrac{e^{it}(2e^{it}-1)}{2-e^{it}}\right|$

$$=\left|\frac{e^{2it}(2-e^{-it})}{2-e^{it}}\right|=\left|\frac{2-e^{-it}}{2-e^{it}}\right|\underset{\uparrow}{=}1$$

$$\left|\frac{w}{\bar w}\right|=1$$

Докажимо: за $w\in\mathbb{D}$ постоји $z\in\mathbb{D}$ тд $f(z)=w$

за $w\in\mathbb{D}^c$ не постоји $z\in\mathbb{D}$ тј. $f(z)=w$

Посматрајмо фју $h(z)=f(z)-w$ и означимо $g(z)=-w$ (const.)

На $\partial\mathbb{D}$ је $|f(z)|=1$, па је за $|w|<1$ испуњено

$|g(z)|<|f(z)|$ $\underset{\text{Рушеова т.}}{\Longrightarrow}$ f и $f+g$ имају једнак број нула у $\mathbb{D}$

$f(z)=0$ за $z=0$ и $z=\frac{1}{2}$ тј. f има 2 нуле у $\mathbb{D}$

$\Rightarrow$ h има 2 нуле у $\mathbb{D}$ тј. постоје $z_1,z_2\in\mathbb{D}$

тд. је $h(z_1)=h(z_2)=0$

$f(z_1)=f(z_2)=w$ нашли смо чак 2 тачке које се сликају у w!

$\Rightarrow$ $f(\mathbb{D})\supseteq\mathbb{D}$.

За $|w|>1$ је $|g(z)|>|f(z)|$, па на основу Рушеове т.

g и $f+g=h$ имају једнак број нула у $\mathbb{D}$, па пошто g нема нула, нема ни h тј. $\nexists z\in\mathbb{D}$ тд. $f(z)-w=0$.

Остаје још да се докаже да $|f(z)|\neq 1$ $\forall z\in\mathbb{D}$

атс $(\exists z\in\mathbb{D})\ |f(z)|=1$

$$\left|\frac{z(2z-1)}{2-z}\right|=1 \qquad z=re^{it}$$

$$1=\left|\frac{re^{it}(2re^{it}-1)}{2-re^{it}}\right|=\left|\frac{r\cdot(2r-e^{-it})}{r(\frac{2}{r}-e^{it})}\right|=\left|\frac{2r-e^{-it}}{\frac{2}{r}-e^{it}}\right|\Rightarrow|2r-\cos t+i\sin t|$$

$$=\left|\frac{2}{r}-\cos t-i\sin t\right|$$

$$\Rightarrow \quad (2r-\cos t)^2 = \left(\frac{2}{r}-\cos t\right)^2$$

$$4r^2 - 4r\cos t = \frac{4}{r^2} - \frac{4}{r}\cos t \qquad / \cdot \frac{r^2}{4}$$

$$r^4 - r^3\cos t = 1 - r\cos t$$

$$r^4 - 1 = (r^3 - r)\cos t$$

$$\cancel{(r^2-1)}(r^2+1) = r\cancel{(r^2-1)}\cos t \quad , \text{за } r^2 \neq 1$$

$$\cos t = \frac{r^2+1}{r} \geq 2 \quad \text{нема решења!}$$

<u>II начин</u>: $|f(e^{it})| = 1$ (као и у претходном)

За $|w|<1$: $\quad f(z) - w = 0$

$$\frac{2z^2 - z}{2-z} - w = 0 \qquad / (2-z)$$

$$2z^2 - z - w(2-z) = 0$$

$$2z^2 - z(1-w) - 2w = 0$$

$$z^2 + z\cdot\frac{w-1}{2} - w = 0$$

Виетове ф-ле: $\quad z_1 + z_2 = \dfrac{1-w}{2}$

$$z_1 z_2 = -w$$

$$\Rightarrow |z_1 z_2| < 1$$

$\Rightarrow$ бар један од z_1 и z_2 има модул <1, нпр

$$\Rightarrow |z_1| < 1 \quad \text{и} \quad f(z_1) = w$$

тј. $f(\mathbb{D}) \supseteq \mathbb{D}$

На основу ПММ је $\max\limits_{z\in\overline{\mathbb{D}}} |f(z)| = \max\limits_{z\in\partial\mathbb{D}} |f(z)| = 1 \quad (|f(e^{it})| = 1)$

$$\Rightarrow |f(z)| < 1 \quad \forall z \in \mathbb{D}$$

(Не може max да се достигне унутра)

(па је $<$)