(1) Одредити број нула полинома $p(z)=z^4-8z+10$ у $\mathbb{D}$.

$$\left.\begin{aligned} f(z)&=-8z+10 \\ g(z)&=z^4 \end{aligned}\right\} \text{ холоморфне на } \mathbb{C}, \ \overline{\mathbb{D}}\subseteq\mathbb{C}$$

$|f(z)|=|10-8z|\geq 10-8|z|=2 \quad \forall z\in\partial\mathbb{D}$

$|g(z)|=|z|^4=1 \quad \forall z\in\partial\mathbb{D}$

$\Rightarrow \quad |g(z)|<|f(z)| \quad \forall z\in\partial\mathbb{D}$

$\Rightarrow$ f и $f+g$ имају једнак број нула у $\mathbb{D}$

Рушеова т.

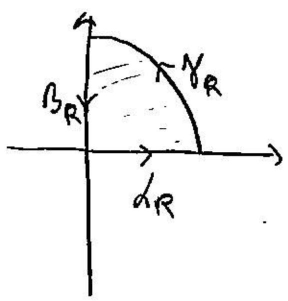
$f(z)=0$ за $8z=10$, $z=\frac{10}{8}>1$, $z\notin\mathbb{D}$

$\Rightarrow$ f нема нула у $\mathbb{D}$

$\Rightarrow$ p нема нула у $\mathbb{D}$

(можемо $f(z)=10$, $g(z)=z^4-8z$ итд.)

(2) Одредити број нула полинома $p(z)=z^4+z^3+1$ у првом квадранту $K=\{z\in\mathbb{C} : \operatorname{Re} z>0, \operatorname{Im} z>0\}$.



$\Omega_R=\{z\in K : |z|<R\}$

$\gamma_R : |z|=R, \ z\in K$

$\alpha_R : z=x, \ x\in[0,R]$

$\beta_R : z=iy, \ y\in[0,R]$

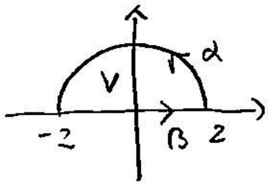
$\partial\Omega_R=\gamma_R+\beta_R+\alpha_R$

$f(z)=z^4+1$

$g(z)=z^3$ итд (домаћи)

решење: p има тачно 1 нулу у K

③ Одредити број решења једначине $z^7+e^z=0$ у полудиску
$V=\{z\in\mathbb{C} : |z|<2,\ \operatorname{Im} z>0\}$



$\alpha : |z|=2,\ \operatorname{Im} z>0$

$\beta : z=x,\ x\in[-2,2]$

$h(z)=z^7+e^z$ колико нула h има у V?

$\left.\begin{array}{l} f(z)=z^7 \\ g(z)=e^z \end{array}\right\}$ холоморфне на $\mathbb{C}$, $\overline{V}\subseteq\mathbb{C}$

на α: $|f(z)|=|z|^7=2^7$

$|g(z)|=|e^z|=e^{\operatorname{Re} z}\leq e^2$

$e^2<2^7$ $\quad |g(z)|<|f(z)|$ на α

на β: $|f(z)|=|x|^7=0$ за $x=0$

не можемо добити $|g(z)|<|f(z)|$ на β!

Дакле, не може овако!

Зато, нађимо број нула у $B(0,2)$!

$V'=\{z\in\mathbb{C} : |z|<2,\ \operatorname{Im} z<0\}$, $B(0,2)=V\cup V'\cup(-2,2)$

$|g(z)|<|f(z)|$ на $\partial B(0,2)$

$\Rightarrow$ f и $f+g$ имају једнак број нула у $B(0,2)$
Руше

$\Rightarrow$ h има 7 нула у $B(0,2)$

? Колико од њих је у V, колико у V', а колико на $(-2,2)$?

Ако је z нула од h, шта је са $\bar z$?

$h(\bar z)=\bar z^7+e^{\bar z}=\overline{z^7}+\overline{e^z}$

$=\overline{h(z)}=0$

$\Rightarrow$ $\bar z$ је нула од h

$\Rightarrow$ h има једнак број нула у V и V'! (нпр.п)

Нуле на $(-2,2)$: тражимо $x\in(-2,2)$ тд. је $h(x)=0$.

$e^{\bar z}=e^{x-iy}=e^x e^{-iy}$

$\overline{e^z}=\overline{e^{x+iy}}=e^x\cdot\overline{e^{iy}}$

$=e^x e^{-iy}$

$\Downarrow$ $\boxed{e^{\bar z}=\overline{e^z}}$

$\bar z^7=\overline{z^7}$ $\quad z=re^{i\theta}$

$\bar z=re^{-i\theta}$

$\bar z^7=r^7e^{-7i\theta}=r\overline{e^{7i\theta}}$

$h(x) = x^7 + e^x \quad , x \in (-2,2)$

$h'(x) = 7x^6 + e^x > 0$ на $(-2,2)$ $\Rightarrow$ h расте на $(-2,2)$

$h(-2) = (-2)^7 + e^{-2} < 0$

$h(2) = 2^7 + e^2 > 0$

$h \uparrow$ на $(-2,2)$

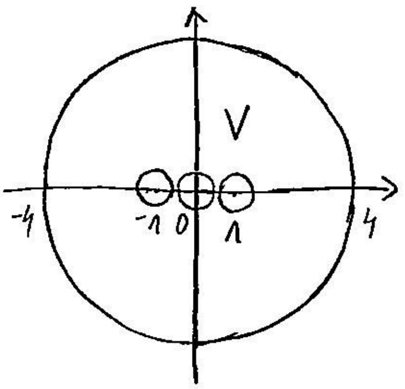
$\Rightarrow$ h има тачно 1 нулу на $(-2,2)$

($h(0) = 1 > 0$ па нула се налази на $(-2,0)$)

Дакле, у V има $(7-1):2 = 3$ нуле.

$(2n+1 = 7 \Rightarrow n = 3)$

4) Нека је $D_{-1} = \{z \in \mathbb{C} : |z+1| < \frac{1}{3}\}$, $D_0 = \{z \in \mathbb{C} : |z| < \frac{1}{3}\}$, $D_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z-1| < \frac{1}{3}\}$ и $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 4\}$.
Ако је $V = D \setminus (\overline{D}_{-1} \cup \overline{D}_1 \cup \overline{D}_0)$, одредити број нула полинома $h(z) = (z+1)^7 + 330z + 400$ у области V.



1) Број нула у D:

$f(z) = (z+1)^7$, $g(z) = 330z + 400$ } холоморфне на $\mathbb{C}$

$|f(z)| = |z+1|^7 \geq (|z|-1)^7 = 3^7$ на ∂D

$|g(z)| = |330z+400| \leq 330|z| + 400$

$= 330 \cdot 4 + 400 = 1320 + 400 = 1720$

$3^7 = 81 \cdot 27 = 2187 > 1720$

$\Rightarrow |g(z)| < |f(z)|$ на ∂D

$\Rightarrow$ f и $f+g = h$ имају једнак број нула у D

Руше

$\Rightarrow$ h има 7 нула у D

($z = -1$ је нула реда 7 за f)

2) Број нула у D_{-1}:

$f(z) = 330z + 400$, $g(z) = (z+1)^7$ } холоморфне на $\mathbb{C}$

$|g(z)| = \left(\frac{1}{3}\right)^7$ на ∂D_{-1}

$|f(z)| = |330z+400|$

$= |330(z+1) + 70| \geq 330|z+1| - 70$

$= 330 \cdot \frac{1}{3} - 70 = 110 - 70 = 40$

$\Rightarrow |g(z)| < |f(z)|$ на ∂D_{-1}

$\Rightarrow$ f и $f+g$ имају једнак број нула у D_{-1}

f има нулу $z = -\frac{400}{330}$, $|z+1| = \left|\frac{-70}{330}\right| = \frac{7}{33} < \frac{1}{3}$ па је нула у D_{-1}

$\Rightarrow$ h има 1 нулу у D_{-1}

(а није у D_1 и D_0!)

$D_1 \cap D_{-1} = \emptyset$

$D_0 \cap D_{-1} = \emptyset$

3) на граници ∂D_{-1}:

$$|h(z)| = |(z+1)^7 + 330z + 400| \geq |330z + 400| - |z+1|^7 \geq 40 - \frac{1}{3^7} > 0$$

$\Rightarrow$ h нема нула на ∂D_{-1}

4) број нула у D_0:

$$\left.\begin{aligned} f(z) &= 330z + 400 \\ g(z) &= (z+1)^7 \end{aligned}\right\} \text{холоморфне на } \mathbb{C}$$

на ∂D_0
$$\begin{cases} |f(z)| = |330z + 400| \geq 400 - 330|z| = 400 - 330\,\frac{1}{3} = 400 - 110 = 290 \\ |g(z)| = |z+1|^7 \leq (|z|+1)^7 = \left(\frac{4}{3}\right)^7 < 2^7 = 2\cdot 64 = 128 < 290 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $|g(z)| < |f(z)|$ за све $z \in \partial D_0$

$\Rightarrow$ f и $f+g$ имају једнак број нула у D_0

Руше

f нема нула у D_0

$\Rightarrow$ h нема нула у D_0

5) на граници ∂D_0: $|h(z)| \geq |330z + 400| - |z+1|^7 > 290 - \left(\frac{4}{3}\right)^7 > 0$

$\Rightarrow$ h нема нула на граници ∂D_0

6) број нула у D_1:

$$\left.\begin{aligned} f(z) &= 330z + 400 \\ g(z) &= (z+1)^7 \end{aligned}\right\} \text{холоморфне на } \mathbb{C}$$

на ∂D_1
$|z-1| = \frac{1}{3}$
$$\begin{cases} |f(z)| = |330z + 400| = |330(z-1) + 730| \geq 730 - 330|z-1| = 730 - 330\cdot\frac{1}{3} \\ \quad = 730 - 110 = 620 \\ |g(z)| = |z+1|^7 = |z-1+2|^7 \leq (|z-1|+2)^7 = \left(\frac{7}{3}\right)^7 \end{cases}$$

$$\left(\frac{7}{3}\right)^7 = \left(\frac{49}{9}\right)^3 \cdot \frac{7}{3} < 6^3 \cdot \frac{7}{3} = 6^2 \cdot 2 \cdot 7 = 72 \cdot 7 = 504 < 620$$

$\Rightarrow$ $|g(z)| < |f(z)|$ на ∂D_1 $\left(|z-1| = \frac{1}{3}\right)$

$\Rightarrow$ f и $f+g = h$ имају једнак број нула у D_1

Руше

$\Rightarrow$ h нема нула у D_1