Формуле: $f: \Omega \to \Omega'$ C^1 дифеом.

$$df(z_0) = f_z(z_0)dz + f_{\bar z}(z_0)d\bar z$$

$$d\bar f(z_0) = \overline{df(z_0)} \Rightarrow \bar f_z dz + \bar f_{\bar z} d\bar z = \overline{f_z}\, d\bar z + \overline{f_{\bar z}}\, dz \Rightarrow \boxed{\bar f_z = \overline{f_{\bar z}}} \quad \boxed{\bar f_{\bar z} = \overline{f_z}}$$

$h = g \circ f$: $dh(z_0) = ?$

$$dh(z_0) = h_z(z_0)dz + h_{\bar z}(z_0)d\bar z = (g\circ f)_z(z_0)dz + (g\circ f)_{\bar z}(z_0)d\bar z$$

$$dg(\zeta_0) = g_\zeta(\zeta_0)d\zeta + g_{\bar\zeta}(\zeta_0)d\bar\zeta$$

$$dg = g_\zeta d\zeta + g_{\bar\zeta}d\bar\zeta, \; df = f_z dz + f_{\bar z}d\bar z$$

$$d(g\circ f) = dg \circ df$$

$$d\bar\zeta = \overline{f_z}\, d\bar z + \overline{f_{\bar z}}\, dz$$

$$dh = g_\zeta(f_z dz + f_{\bar z} d\bar z) + g_{\bar\zeta}(\overline{f_z}\, d\bar z + \overline{f_{\bar z}}\, dz)$$

$$dh = (g_\zeta f_z + g_{\bar\zeta}\overline{f_{\bar z}})dz + (g_\zeta f_{\bar z} + g_{\bar\zeta}\overline{f_z})d\bar z$$

$$\boxed{dh = (g_\zeta f_z + g_{\bar\zeta}\bar f_z)dz + (g_\zeta f_{\bar z} + g_{\bar\zeta}\bar f_{\bar z})d\bar z}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned}(g\circ f)_z &= g_\zeta f_z + g_{\bar\zeta}\bar f_z \\ (g\circ f)_{\bar z} &= g_\zeta f_{\bar z} + g_{\bar\zeta}\bar f_{\bar z}\end{aligned}}$$

Ако је f конформно $\Rightarrow f_{\bar z} = 0$

$\Rightarrow \bar f_z = 0$

$$\mu_{g\circ f}(z_0) = \frac{(g\circ f)_{\bar z}(z_0)}{(g\circ f)_z(z_0)} = \frac{g_{\bar\zeta}\overline{f_z}}{g_\zeta f_z} = (\mu_g \circ f)(z_0)\frac{\overline{f'(z_0)}}{f'(z_0)}$$

$\Rightarrow$ $D_{g\circ f}(z_0) = D_g(f(z_0))$

Ако је g конформно $\Rightarrow$ $\left.\begin{aligned}\mu_{g\circ f}(z) &= \mu_f(z) \\ D_{g\circ f}(z) &= D_f(z)\end{aligned}\right\}$

Ако је f дифеоморфизам, $f: \Omega \to \Omega'$, $g: \Omega'' \to \Omega'$ ($\Omega'' = \Omega$), $g = f^{-1}$ тада је:

$$\left.\begin{aligned}1 = (g\circ f)_z(z_0) &= \underbrace{(f^{-1})_\zeta(f(z_0))}\, f_z(z_0) + (f^{-1})_{\bar\zeta}(f(z_0)) \cdot \overline{f_{\bar z}}(z_0) \\ 0 = (g\circ f)_{\bar z}(z_0) &= \underbrace{(f^{-1})_\zeta(f(z_0))} \cdot f_{\bar z}(z_0) + (f^{-1})_{\bar\zeta}(f(z_0))\, \overline{f_z}(z_0)\end{aligned}\right\}$$

$\Delta = f_z \overline{f_z} - f_{\bar z}\overline{f_{\bar z}}$

$\Delta = |f_z|^2 - |f_{\bar z}|^2$

$\Delta_1 = \overline{f_z}$

$\Delta_2 = -f_{\bar z}$

$$\Rightarrow (f^{-1})_\zeta(f(z_0)) = \frac{\overline{f_z}(z_0)}{J_f(z_0)}, \quad (f^{-1})_{\bar\zeta}(f(z_0)) = \frac{-f_{\bar z}(z_0)}{J_f(z_0)}$$

$$\mu_{f^{-1}}(f(z_0)) = \frac{(f^{-1})_{\bar w}(f(z_0))}{(f^{-1})_w(f(z_0))} = \frac{-f_{\bar z}(z_0)}{\overline{f_z}(z_0)} \quad , \quad \mu_f(z_0) = \frac{f_{\bar z}(z_0)}{f_z(z_0)}$$

$$\Rightarrow |(\mu_{f^{-1}} \circ f)(z_0)| = |\mu_f(z_0)| \quad \text{јер } |\overline{f_z}| = |f_z|$$

$$D_{f^{-1}} = \frac{|f^{-1}_{\zeta}| + |f^{-1}_{\bar\zeta}|}{|f^{-1}_{\zeta}| - |f^{-1}_{\bar\zeta}|} \overset{/\frac{1}{J_f}}{=} \frac{|f_{\bar z}| + |\overline{f_z}|}{|\overline{f_z}| - |f_{\bar z}|} = \frac{|f_z| + |f_{\bar z}|}{|f_z| - |f_{\bar z}|} = D_f$$

$$\boxed{D_{f^{-1}}(\zeta_0) = D_f(f^{-1}(\zeta_0))}$$

$\zeta_0 = f(z_0)$

$$D_{f^{-1}}(f(z_0)) = D_f(z_0) \rightsquigarrow D_{f^{-1}} \circ f = D_f$$

Инверз К квазиконформног је К квазиконформно!

__Теорема__: $f:\Omega\to\Omega'$ регуларно K_1 квазиконформно, $g:\Omega'\to\Omega''$ регуларно K_2 квазиконформно $\Rightarrow$ $g\circ f:\Omega\to\Omega''$ регуларно K_1K_2 квазиконформно

__Доказ__:

$$h=g\circ f \qquad D_h=\frac{(|h_z|+|h_{\bar z}|)^2}{J_h}$$

$$D_h=\frac{|h_z|+|h_{\bar z}|}{|h_z|-|h_{\bar z}|}=\frac{|(g\circ f)_z|+|(g\circ f)_{\bar z}|}{|(g\circ f)_z|-|(g\circ f)_{\bar z}|}$$

$J_h=J_g\cdot J_f$

$$J_h=|h_z|^2-|h_{\bar z}|^2 \qquad h_z=g_\zeta f_z+g_{\bar\zeta}\overline{f_{\bar z}},\ h_{\bar z}=g_\zeta f_{\bar z}+g_{\bar\zeta}\overline{f_z}$$

$$J_g=|g_\zeta|^2-|g_{\bar\zeta}|^2,\quad J_f=|f_z|^2-|f_{\bar z}|^2$$

$$|h_z|^2=h_z\cdot\overline{h_z}=(g_\zeta f_z+g_{\bar\zeta}\overline{f_{\bar z}})\cdot(\overline{g_\zeta}\,\overline{f_z}+\overline{g_{\bar\zeta}}f_{\bar z})=|g_\zeta|^2|f_z|^2+g_\zeta f_z\overline{g_{\bar\zeta}}f_{\bar z}+g_{\bar\zeta}\overline{f_{\bar z}}\,\overline{g_\zeta}\,\overline{f_z}+|g_{\bar\zeta}|^2|f_{\bar z}|^2$$

$$|h_{\bar z}|^2=h_{\bar z}\overline{h_{\bar z}}=(g_\zeta f_{\bar z}+g_{\bar\zeta}\overline{f_z})(\overline{g_\zeta}\,\overline{f_{\bar z}}+\overline{g_{\bar\zeta}}f_z)$$

$$=|g_\zeta|^2|f_{\bar z}|^2+g_{\bar\zeta}\overline{g_\zeta}\,\overline{f_z}\,\overline{f_{\bar z}}+g_\zeta\overline{g_{\bar\zeta}}f_{\bar z}f_z+|g_{\bar\zeta}|^2|f_z|^2$$

$$\Rightarrow\ J_h=|g_\zeta|^2|f_z|^2+|g_{\bar\zeta}|^2|f_{\bar z}|^2-|g_\zeta|^2|f_{\bar z}|^2-|g_{\bar\zeta}|^2|f_z|^2=J_f\cdot J_g$$

$$D_h=\frac{(|h_z|+|h_{\bar z}|)^2}{J_h}=\frac{(|(g\circ f)_z|+|(g\circ f)_{\bar z}|)^2}{J_f\cdot J_g}=\frac{(|g_\zeta f_z+g_{\bar\zeta}\overline{f_{\bar z}}|+|g_\zeta f_{\bar z}+g_{\bar\zeta}\overline{f_z}|)^2}{J_f\cdot J_g}$$

$$\le\frac{(|g_\zeta f_z|+|g_{\bar\zeta}\overline{f_{\bar z}}|+|g_\zeta f_{\bar z}|+|g_{\bar\zeta}\overline{f_z}|)^2}{J_f\cdot J_g}=\frac{\Big(|g_\zeta|(|f_z|+|f_{\bar z}|)+|g_{\bar\zeta}|\big(\overset{|f_{\bar z}|}{\overset{\shortparallel}{|\overline{f_{\bar z}}|}}+\overset{|f_z|}{\overset{\shortparallel}{|\overline{f_z}|}}\big)\Big)^2}{J_f\cdot J_g}$$

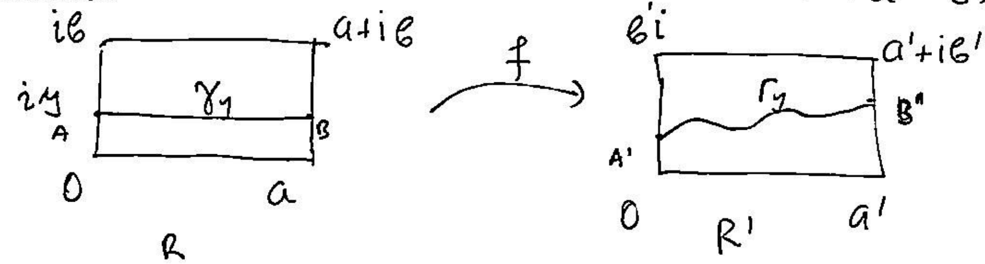
$$=\frac{(|g_\zeta|+|g_{\bar\zeta}|)^2(|f_z|+|f_{\bar z}|)^2}{J_f\cdot J_g}=D_g\cdot D_f \qquad \square$$

① Нека су R и R' два правоугаоника са странама a, b и a', b' редом. и нека је $\frac{a}{b} \le \frac{a'}{b'}$. Ако је f C^1 дифеоморфизам тд. $f : R \to R'$, $\hat{f} : \bar{R} \to \bar{R}'$ је хомеоморфизам тј. слика темена редом у одговарајућа темена, стране a на a' и стране b на b', доказати да је

(тј. и да f чува оријент.)

$$\frac{a'}{b'} : \frac{a}{b} \le \sup_{z \in R} D_f(z).$$

$=$ се достиже за пресликавање $A(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{a'}{a} + \frac{b'}{b}\right) z + \frac{1}{2}\left(\frac{a'}{a} - \frac{b'}{b}\right)\bar{z}$.



Нека је $y \in (0, b)$ фиксирано. Посматрајмо дуж $\gamma_y = \{ t + iy : t \in [0, a]\}$

$$\gamma_y : [0, a] \to \bar{R}, \quad A = \gamma_y(0), \quad B = \gamma_y(a)$$

Пошто се стране сликају на стране то $f(A)$ и $f(B)$ морају бити на b' странама од R'.

$$\Gamma_y : [0, a] \to R' \qquad \Gamma_y = f \circ \gamma_y$$

$$\gamma_y(x) = x + iy, \quad x \in [0, a]$$

$$\Gamma_y(x) = f(x + iy)$$

$$\ell(\Gamma_y) \ge a', \quad \ell(\Gamma_y) = \int_{\Gamma_y} |dw| = \int_{\gamma_y} |f_z dz + f_{\bar{z}} d\bar{z}|$$

$$a' \le \ell(\Gamma_y) = \int_{\gamma_y} |f_z dz + f_{\bar{z}} d\bar{z}| = \int_0^a |f_z(x+iy) \cdot 1 + f_{\bar{z}}(x+iy) \cdot 1| \cdot dx$$

$$a' \le \int_0^a (|f_z(x+iy)| + |f_{\bar{z}}(x+iy)|) dx \quad \Big/ \int_0^b dy$$

$$a' b \le \int_0^b \int_0^a (|f_z| + |f_{\bar{z}}|) dx dy \underset{\text{Фубини}}{=} \iint_R (|f_z| + |f_{\bar{z}}|) dx dy$$

$$a'b \le \iint_R (|f_z|+|f_{\bar z}|)\,dx\,dy = \iint_R \sqrt{(|f_z|+|f_{\bar z}|)^2}\,dx\,dy = \iint_R \sqrt{\underbrace{\frac{|f_z|+|f_{\bar z}|}{|f_z|-|f_{\bar z}|}}_{D_f(z)} \cdot \underbrace{(|f_z|-|f_{\bar z}|)(|f_z|+|f_{\bar z}|)}_{J_f(z)}}\,dx\,dy$$

$$\Rightarrow (a'b)^2 \underset{KШ}{\le} \iint_R D_f(z)\,dx\,dy \cdot \underbrace{\iint_R J_f(z)\,dx\,dy}_{\iint_{R'} du\,dv = a'b'}$$

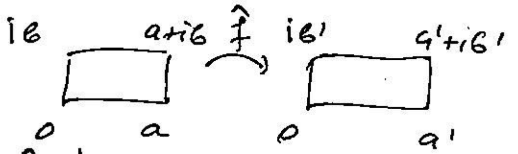
$$\Rightarrow \frac{a'^2 b^2}{a'b'} \le \iint_R D_f(z)\,dx\,dy \le \sup_{z\in R} D_f(z)\cdot \underbrace{\iint_R dx\,dy}_{\parallel \atop ab}$$

$$\Rightarrow \frac{a' b^2}{a\cancel{b} b'} \le \sup_{z\in R} D_f(z)$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{a'}{b'} : \frac{a}{b} \le \sup_{z\in R} D_f(z)}$$

(*) За f конформно је $D_f(z)=1$, па је $\frac{a'}{b'} \le \frac{a}{b}$.
Из услова задатка сада следи да је $\frac{a'}{b'} = \frac{a}{b}$, тј. правоугаоници су слични. Дакле, конформно пресликавање између два правоугаоника тд. слика странице на странице, темена на темена, постоји акко су ти правоугаоници слични.

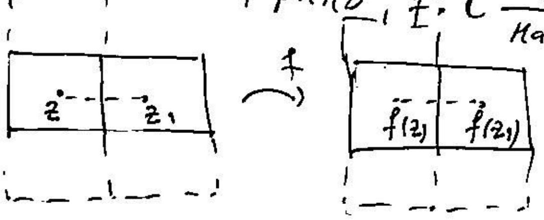
II начин да то покажемо: $\hat f : \bar R \to \bar R'$



$f : R \to R'$ конформно, (Каратеодори даје $\hat f$)

f се може принципом симетрије проширити на $\mathbb{C}$!

f конформно, $f : \mathbb{C} \xrightarrow[на]{1-1} \mathbb{C} \underset{KAB}{\Rightarrow} f(z) = az+b$ тј. f је сличност (комп. транслације, ротације и хомотетије)



$$A(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{a'}{a} + \frac{b'}{b}\right) z + \frac{1}{2}\left(\frac{a'}{a} - \frac{b'}{b}\right)\bar{z} \quad , z \in \mathbb{C}$$

$A(a)=a'$, $A(ib)=ib'$, $A(a+ib)=a'+ib'$, $A(0)=0$ (темена се сликају у темена)

$$D_{A}(z) = \frac{|A_z|+|A_{\bar z}|}{|A_z|-|A_{\bar z}|} = \frac{1+\frac{a'b-ab'}{a'b+ab'}}{1-\frac{a'b-ab'}{a'b+ab'}}$$

$$A_z = \frac{1}{2}\left(\frac{a'}{a}+\frac{b'}{b}\right), \quad A_{\bar z} = \frac{1}{2}\left(\frac{a'}{a}-\frac{b'}{b}\right)$$

$$\frac{A_{\bar z}}{A_z} = \frac{a'b-ab'}{a'b+ab'}$$

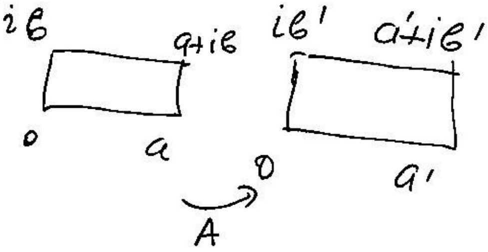
$$D_{A}(z) = \frac{a'b + \cancel{ab'} + a'b - \cancel{ab'}}{\cancel{a'b} + ab' - \cancel{a'b} + ab'} = \frac{2a'b}{2ab'} = \frac{a'}{b'} : \frac{a}{b}$$

$z = x+iy \quad x \in (0,a), y \in (0,b)$

$$A(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{a'}{a}+\frac{b'}{b}\right)(x+iy) + \frac{1}{2}\left(\frac{a'}{a}-\frac{b'}{b}\right)(x-iy)$$

$$A(z) = \frac{1}{2}x\cdot\left(\frac{a'}{a}+\cancel{\frac{b'}{b}}+\frac{a'}{a}-\cancel{\frac{b'}{b}}\right) + i\cdot\frac{1}{2}y\left(\cancel{\frac{a'}{a}}+\frac{b'}{b}-\cancel{\frac{a'}{a}}+\frac{b'}{b}\right)$$

$$A(z) = x\cdot\frac{a'}{a} + i\cdot y\frac{b'}{b} = \frac{a'}{a}\cdot x + \frac{b'}{b}\cdot iy$$



$$\operatorname{Re} A(z) = \frac{a'}{a}x \in \frac{a'}{a}\cdot(0,a) = (0,a')$$

$$\operatorname{Im} A(z) = \frac{b'}{b}y \in \frac{b'}{b}\cdot(0,b) = (0,b')$$

$$\Rightarrow A(R) \subseteq R'$$

$A^{-1}(w) = ?$

$$w = \frac{a'}{a}x + \frac{b'}{b}iy = u+iv$$

$$x = \frac{ua}{a'}, \quad y = \frac{vb}{b'}$$

$A^{-1}(w) = z = x+iy = \frac{ua}{a'} + i\frac{vb}{b'}$ где је $w=u+iv$

A је 1-1 и на? (постоји инверз)

$$A^{-1}(R') \subseteq R$$

$$\Rightarrow \boxed{A(R)=R'}$$