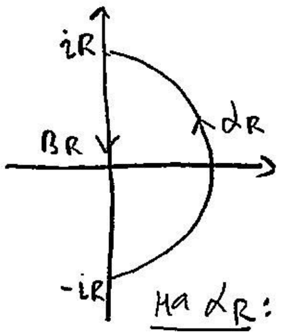
(7) Доказати да једначина $z+e^{-z}=k$, $k>1$ има тачно 1 решење у $\Pi_+=\{z\in\mathbb{C} : \mathrm{Re}\, z>0\}$ и да је то решење реално.

$h(z)=z+e^{-z}-k$ тражимо број нула ф-је h у Π_+

$$\left.\begin{aligned} f(z)&=z-k \\ g(z)&=e^{-z}\end{aligned}\right\} \text{ холоморфне у } \mathbb{C}$$



$\gamma_R=\alpha_R+\beta_R$ $\qquad$ $\Omega_R=\{z\in\Pi_+ : |z|<R\}$

α_R: $|z|=R$, $\mathrm{Re}\, z>0$

β_R: $z=iy$, $y\in[-R,R]$

<u>На α_R:</u> $|f(z)|=|z-k|\geq |z|-k=R-k$ на α_R

$$|g(z)|=|e^{-z}|=e^{\mathrm{Re}(-z)}=e^{-\mathrm{Re}\, z}<e^0=1$$

јер $-\mathrm{Re}\, z<0$ на α_R

$\Rightarrow$ $|g(z)|<|f(z)|$ на α_R

за $R-k>1$ тј. $R>k+1$

<u>На β_R:</u>

$$|f(z)|=|z-k|=|iy-k|=\sqrt{k^2+y^2}>k>1$$

$$|g(z)|=|e^{-z}|=|e^{-iy}|=1$$

$\Rightarrow$ $|g(z)|<|f(z)|$ на β_R

за све R (па и за $R>k+1$)

Дакле, за $R>k+1$ је $|g(z)|<|f(z)|$ на $\gamma_R=\alpha_R+\beta_R$

$\Rightarrow$ f и $f+g=h$ имају једнак број нула у Ω_R

f има 1 нулу $z=k$ у Ω_R (за $R>k+1$ јесте у Ω_R)

$\Rightarrow$ h има 1 нулу у Ω_R (за све $R>k+1$)

$\Rightarrow$ h има 1 нулу у Π_+.

$$\left.\begin{aligned} h(z)&=z+e^{-z}-k \\ h(0)&=1-k<0 \\ h(k)&=e^{-k}>0\end{aligned}\right\} \overset{\text{Болцано-Коши}}{\Rightarrow} (\exists z\in(0,k))\ h(z)=0$$

тј. h има реалну нулу!

(8) Доказати да полином $p(z)=z^{11}+2z^5+1$ има тачно 5 нула у $\mathbb{D}$.

$$\left.\begin{aligned} f(z)&=2z^5 \\ g(z)&=z^{11}+1 \end{aligned}\right\} \text{ холоморфне на } \mathbb{C}$$

$$\left.\begin{aligned} &|f(z)|=2 \text{ на } \partial\mathbb{D} \\ &|g(z)|\leq |z^{11}|+1=|z|^{11}+1=2 \text{ на } \mathbb{D} \end{aligned}\right\}$$

Не важи $|g(z)|<|f(z)|$ није добра процена?

Нека је $B(0,\rho)\subseteq\mathbb{D}$ $\quad 0<\rho<1$

На $\partial B(0,\rho)$ је $|f(z)|=2\rho^5$ и $|g(z)|\leq \rho^{11}+1$

Да ли је за неко $\rho\in(0,1)$ могуће $\rho^{11}+1<2\rho^5$?

$h(\rho)=2\rho^5-\rho^{11}-1$

$h'(\rho)=10\rho^4-11\rho^{10}=\rho^4(10-11\rho^6)<0$

за $10-11\rho^6<0$

тј. $11\rho^6>10$

$\rho^6>\frac{10}{11}$

$\rho>\sqrt[6]{\frac{10}{11}}\approx 0{,}98$

$h(1)=0$

$h'(\rho)<0$ на $\left(\sqrt[6]{\frac{10}{11}},1\right)$

$\Rightarrow$ h опада на $\left(\sqrt[6]{\frac{10}{11}},1\right)$, а $h(1)=0$

$\Rightarrow$ $h(\rho)>0$ на $\left(\sqrt[6]{\frac{10}{11}},1\right)$

$|g(z)|<|f(z)|$ на $\partial B(0,\rho)$ за све $\rho\in\left(\sqrt[6]{\frac{10}{11}},1\right)$

$\Rightarrow$ f и $f+g$ имају једнак број нула у $B(0,\rho)$

$\Rightarrow$ p има 5 нула у $B(0,\rho)$ за све $\rho\in\left(\sqrt[6]{\frac{10}{11}},1\right)$

$\Rightarrow$ p има 5 нула у $\mathbb{D}$