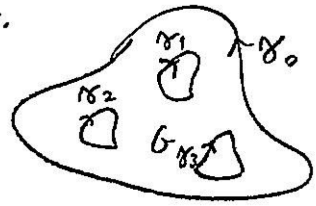
Принцип аргумента и Рушеова теорема

деф1 $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, Ω отворен, $A \subset \Omega$ тд. A нема тачака нагомилавања унутар Ω. Кажемо да је $f: \Omega \to \mathbb{C}$ мероморфна у Ω ако је f холоморфна на $\Omega \setminus A$ и свако $a \in A$ је пол фје f. (дакле, сви сингуларитети су полови).

деф2: Нека су $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n$ просте затворене контуре у $\mathbb{C}$ (нема самопресецања, затворене, део по део глатке) и нека је $G_k = \operatorname{int}(\gamma_k)$, $k = 0, 1, \dots, n$. Пп. да важи:



1) $\overline{G_k} \subseteq G_0$, $k = 1, 2, \dots, n$
2) $\overline{G_i} \cap \overline{G_j} = \emptyset$ за $i \neq j$, $i, j \geq 1$

Нека је $G = G_0 \setminus \bigcup_{k=1}^{n} \overline{G_k}$. Област G деф. на овакав начин се назива регуларна област. ($n+1$-струко повезана)

(G^c има $n+1$ компоненти повезаности)

(позитивно оријентисана граница Γ од G се састоји од контура $\gamma_0, \gamma_1^-, \dots, \gamma_n^-$)

(ПА)
Теорема 1: Нека је $f: \Omega \to \mathbb{C}$ мероморфна фја и нека је $\overline{G} \subseteq \Omega$ тд. је G регуларна област и ∂G не садржи ни нуле ни полове фје f. Тада је:

$$\int_{\partial G} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = 2\pi i \cdot (N_f - P_f)$$

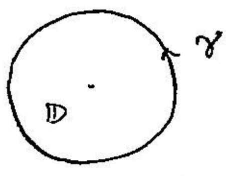
где је N_f број нула фје f, а P_f број полова фје f у G. (рачунају се мултипликитети)

Ω област, $\overline{G} \subseteq \Omega$

Теорема 2: (Рушеова) Пп. да је G регуларна област и означимо са γ позитивно оријентисану границу области G. Ако су $f, g: \Omega \to \mathbb{C}$ холоморфне на Ω и $|g(z)| < |f(z)|$ $\forall z \in \partial G$, тада f и $f+g$ имају једнак број нула у G ($N_f = N_{f+g}$).

① Одредити број нула полинома $p(z)=z^{10}-6z^{9}-3z+1$ у диску $\mathbb{D}=\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}$.

(хоћемо $f+g=p$, а f тј. $|f|>|g|$ на $\partial\mathbb{D}$)



$\gamma: |z|=1 \quad \gamma=\partial\mathbb{D}$

$$\left.\begin{aligned} f(z)&=-6z^{9}\\ g(z)&=z^{10}-3z+1\end{aligned}\right\}$$ холоморфне су на Ω (област) $\overline{\mathbb{D}}\subseteq\Omega\subseteq\mathbb{C}$ (можемо узети и $\Omega=\mathbb{C}$)

$|f(z)|=6|z|^{9}=6$ на $\partial\mathbb{D}$ тј за $|z|=1$

$|g(z)|=|z^{10}-3z+1|\leq|z|^{10}+3|z|+1=5$ на $\partial\mathbb{D}$

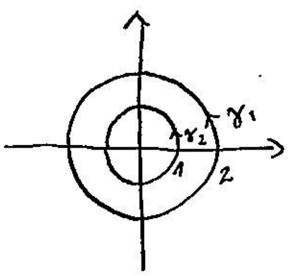
$\Rightarrow\ |g(z)|<|f(z)| \quad \forall z\in\partial\mathbb{D}$

$\Rightarrow$ Рушеова т. f и $f+g=p$ имају једнак број нула у $\mathbb{D}$

$\Rightarrow$ p има 9 нула у $\mathbb{D}$

(јер је 0 нула мултипл. 9 у $\mathbb{D}$ за f) тј. f има 9 нула у $\mathbb{D}$.

② Одредити број нула полинома $P(z)=z^{2021}-12z^{4}+3z-1$ у прстену $A=\{z\in\mathbb{C}: 1<|z|<2\}$.



$\gamma_1: |z|=2 \qquad B(0,1)=\{z\in\mathbb{C}: |z|<1\}$

$\gamma_2: |z|=1 \qquad B(0,2)=\{z\in\mathbb{C}: |z|<2\}$

$A=B(0,2)\setminus\overline{B(0,1)}$

1) број нула у $B(0,2)$:

$$\left.\begin{aligned} f(z)&=z^{2021}\\ g(z)&=-12z^{4}+3z-1\end{aligned}\right\}$$ холоморфне на $\mathbb{C}$

$|f(z)|=|z|^{2021}=2^{2021}$ за $|z|=2$ тј. $z\in\partial B(0,2)$

$|g(z)|=|-12z^{4}+3z-1|\leq 12|z|^{4}+3|z|+1=199$ на γ_1 тј. за $|z|=2$

$\Rightarrow\ |g(z)|<|f(z)|,\ \forall z\in\partial B(0,2)$

$\Rightarrow$ Рушеова т. f и $f+g=p$ имају једнак број нула у $B(0,2)$

$\Rightarrow$ p има 2021 нула у $B(0,2)$. (f има 2021 нула у $B(0,2)$)

2) број нула у $B(0,1)$:

$$\left.\begin{aligned} f(z) &= -12z^4 \\ g(z) &= z^{2021}+3z-1 \end{aligned}\right\} \text{холоморфне на } \mathbb{C}$$

$|f(z)| = 12|z|^4 = 12$ на γ_2 тј. $\forall z \in \partial B(0,1)$ $(|z|=1)$

$|g(z)| = |z^{2021}+3z-1| \leq |z|^{2021}+3|z|+1 = 5 \quad \forall z \in \partial B(0,1)$

$\Rightarrow \quad |g(z)| < |f(z)| \quad \forall z \in \partial B(0,1)$

$\underset{\text{Рушеова т.}}{\Rightarrow}$ f и $f+g=p$ имају једнак број нула у $B(0,1)$

$\Rightarrow$ p има 4 нуле у $B(0,1)$

Остаје још да се провери на граници $\partial B(0,1)$!

3) број нула на $\partial B(0,1)$:

$|z|=1$

$$|p(z)| = |z^{2021}-12z^4+3z-1| \geq \underbrace{|-12z^4|}_{=12 \text{ за } |z|=1} - \underbrace{|z^{2021}+3z-1|}_{\leq 5 \text{ за } |z|=1}$$

$\geq 12-5 = 7 > 0$ на $\partial B(0,1)$

$\Rightarrow \quad |p(z)| > 0 \quad \forall z \in \partial B(0,1)$

$\Rightarrow$ p нема нула на $\partial B(0,1)$

Коначно, p има $2021-4 = 2017$ нула у A.

③ Одредити број решења једначине $2z^{2021}+1 = e^z$ у $B(0,1)$

$h(z) = 2z^{2021}+1-e^z$ тражимо број нула фје h

$$\left.\begin{aligned} f(z) &= 2z^{2021} \\ g(z) &= 1-e^z \end{aligned}\right\} \text{холоморфне на } \mathbb{C}$$

$|f(z)| = 2$ за $|z|=1$ тј. на $\partial B(0,1)$

$$|g(z)| = |1-e^z| = |e^z-1| = \left|\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} - 1\right| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|z|^n}{n!}$$

$$\left.= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = e-1 < 2 \quad \forall z \in \partial B(0,1)\right\} \Rightarrow \quad |g(z)| < |f(z)| \quad \forall z \in \partial B(0,1)$$

$\Rightarrow$ f и $f+g=h$ имају једнак број нула у $B(0,1)$
Рушеова т.

$\Rightarrow$ h има 2021 нула у $B(0,1)$, па тражена једн има 2021 решење.

(4) Доказати да једначина $e^z = az^n$ за $a > e$, $a \in \mathbb{R}$ има тачно n решења у $B(0,1)$.

$h(z) = e^z - az^n$ тражимо број нула фје h

$$\left.\begin{array}{l} f(z) = -az^n \\ g(z) = e^z \end{array}\right\} \text{холоморфне на } \mathbb{C}$$

$|f(z)| = |-az^n| = |a| = a$ за $|z|=1$

$|g(z)| = |e^z| = e^{\mathrm{Re}\, z} \leq e^{|z|} = e < a$ за $|z|=1$

$\Rightarrow$ $|g(z)| < |f(z)|$ $\forall z \in \partial B(0,1)$

$\Rightarrow$ f и $f+g=h$ имају једнак број нула у $B(0,1)$
Рушеова т.

$\Rightarrow$ h има n нула у $B(0,1)$

(5) Нека је g холоморфна на Ω, $\overline{\mathbb{D}} \subseteq \Omega$ и $|g(z)| < 1$ за све $z \in \partial\mathbb{D}$ (тј. $|z|=1$). Доказати да фја g има јединствену фиксну тачку у $\overline{\mathbb{D}}$.

$h(z) = g(z) - z$ колико нула има h у $\mathbb{D}$?

- На $\partial\mathbb{D}$ је $|h(z)| = |g(z) - z| \geq |z| - |g(z)| = 1 - |g(z)| > 0$

$\Rightarrow$ h нема нула на $\partial\mathbb{D}$

- $f(z) = -z$ холоморфна на $\mathbb{C}$

$g(z)$

$|f(z)| = |z| = 1$ на $\partial\mathbb{D}$ ($|z|=1$)

$|g(z)| < 1 = |f(z)|$ $\forall z \in \partial\mathbb{D}$

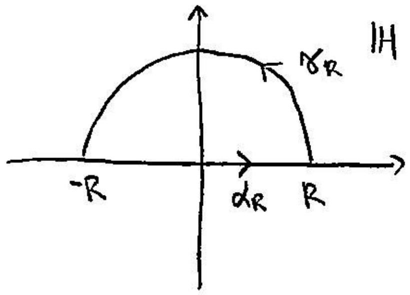
$\Rightarrow$ f и $f+g=h$ имају једнак број нула у $\mathbb{D}$

Рушеова т.

$\Rightarrow$ h има тачно 1 нулу у $\mathbb{D}$.

$$\boxed{h \text{ дакле има тачно 1 нулу у } \overline{\mathbb{D}}}$$

⑥ Одредити број нула фје $h(z)=e^{iz}+z^2+2$ у горњој полуравни $\mathbb{H}=\{z\in\mathbb{C} : \operatorname{Im} z>0\}$.



$\Omega_R \subseteq \mathbb{H}$ $\quad \partial\Omega_R=\alpha_R+\gamma_R$

$\Omega_R=\{z\in\mathbb{H} : |z|<R\}$

$\gamma_R : |z|=R, \operatorname{Im} z>0$

$\alpha_R : z=x\in\mathbb{R}, \; x\in[-R,R]$

$$\left.\begin{aligned} f(z) &= z^2+2 \\ g(z) &= e^{iz} \end{aligned}\right\} \text{ холоморфне на } \mathbb{C}$$

На γ_R:
$$\left.\begin{aligned} &|f(z)|=|z^2+2|\geq |z|^2-2>1 \text{ за } |z|>\sqrt{3} \\ &|g(z)|=|e^{iz}|=e^{\operatorname{Re}(iz)}=e^{-\operatorname{Im} z}<e^0=1 \end{aligned}\right\} \text{ за } z\in\gamma_R$$

$\Rightarrow$ $|g(z)|<|f(z)|$ на γ_R за $R>\sqrt{3}$ нпр. $R=2$

на α_R:
$$\left.\begin{aligned} &|f(z)|=|x^2+2|=x^2+2\geq 2 \text{ за } x\in[-R,R] \\ &|g(z)|=|e^{iz}|=|e^{ix}|=1 \end{aligned}\right\} \text{ за } z\in\alpha_R$$

$\Rightarrow$ $|g(z)|<|f(z)|$ $\forall z\in\alpha_R$

$\Rightarrow$ $|g(z)|<|f(z)|$ на $\partial\Omega_R$

$\Rightarrow$ f и $f+g=h$ имају једнак број нула у Ω

Рушеова т.

Нуле од $f(z)=z^2+2$ су $z_1=i\sqrt{2}$ и $z_2=-i\sqrt{2}$

$z_1\in\Omega$ јер $2>\sqrt{2}$, $z_2\notin\Omega$ $(R=2)$

$\Rightarrow$ f има једну нулу у Ω_R

$\Rightarrow$ h има 1 нулу у Ω_R (и то за све $R\geq 2$)

$\Rightarrow$ h има 1 нулу у $\mathbb{H}$