Увод: ①

f C^1 дифеоморфизам, $f:\Omega\to\Omega'$, $\Omega,\Omega'\subseteq\mathbb{C}$ области

$$\partial_\alpha f(z)=\lim_{r\to 0}\frac{f(z+re^{i\alpha})-f(z)}{re^{i\alpha}}$$

(f чува оријентацију тј. $J_f>0$)

$$f(z+h)-f(z)=df(z)\cdot h+o(h),\ h\to 0$$

$f=u+iv \qquad z=x+iy \qquad df(z)=\begin{bmatrix}u_x & u_y\\ v_x & v_y\end{bmatrix}$

$$df(z)\cdot h=\begin{bmatrix}u_x & u_y\\ v_x & v_y\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}h_1\\ h_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}u_xh_1+u_yh_2\\ v_xh_1+v_yh_2\end{bmatrix}$$

$dx:\mathbb{C}\to\mathbb{R} \qquad dy:\mathbb{C}\to\mathbb{R} \qquad dx, dy$ линеарни оператори

$dx(h)=\mathrm{Re}\,h \qquad dy(h)=\mathrm{Im}\,h$

$df=du+idv \qquad du=u_xdx+u_ydy$

$dv=v_xdx+v_ydy$

$f_z=\frac{1}{2}(f_x-if_y) \qquad f_{\bar z}=\frac{1}{2}(f_x+if_y) \qquad f_x=u_x+iv_x$

$f_y=u_y+iv_y$

$dz=dx+idy$ (ознака) $\qquad dz:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$

$d\bar z=dx-idy \qquad dz(h)=\mathrm{Re}\,h+i\cdot\mathrm{Im}\,h=h$

$d\bar z(h)=\mathrm{Re}\,h-i\,\mathrm{Im}\,h=\bar h$

$$f_zdz+f_{\bar z}d\bar z=\frac{1}{2}(f_x-if_y)(dx+idy)+\frac{1}{2}(f_x+if_y)(dx-idy)$$

$$f_zdz+f_{\bar z}d\bar z=\frac{1}{2}\left(f_xdx-\cancel{if_ydx}+\cancel{f_xidy}+f_ydy+f_xdx+\cancel{if_ydx}-\cancel{if_xdy}+f_ydy\right)$$

$$=f_xdx+f_ydy=(u_x+iv_x)dx+(u_y+iv_y)dy$$

$$=du+idv=df$$

$$df=f_zdz+f_{\bar z}d\bar z$$

$$df(z)h=f_zdz(h)+f_{\bar z}d\bar z(h)=f_zh+f_{\bar z}\bar h$$

$$\partial_\alpha f(z)=\lim_{r\to 0}\frac{df(z)\cdot re^{i\alpha}+o(r)}{re^{i\alpha}}$$

$$\partial_\alpha f(z) = \lim_{r\to 0} \frac{f_z(z)\cdot re^{i\alpha} + f_{\bar z}(z) re^{-i\alpha} + o(r)}{r} e^{-i\alpha}$$

$$= f_z(z) + f_{\bar z}(z) e^{-2i\alpha} \Rightarrow \big|\,|f_z(z)| - |f_{\bar z}(z)|\,\big| \leq |\partial_\alpha f(z)| \leq |f_z(z)| + |f_{\bar z}(z)|$$

треба показати за које α се достиже $=$ (*)

$$\partial_\alpha f(z) = e^{-i\alpha}\left(e^{i\alpha} f_z(z) + e^{-i\alpha} f_{\bar z}(z)\right)$$
$$= e^{-i\alpha}\left(e^{i\alpha}\tfrac{1}{2}(f_x - i f_y) + e^{-i\alpha}\tfrac{1}{2}(f_x + i f_y)\right)$$
$$= e^{-i\alpha}\tfrac{1}{2}\left(f_x \cos\alpha \cdot 2 + i\cdot f_y\cdot(-2i\sin\alpha)\right)$$
$$= e^{-i\alpha}(f_x\cos\alpha + f_y \sin\alpha) \checkmark$$

! Пошто f чува оријентацију $J_f > 0$, па $|f_z| > |f_{\bar z}|$!

$$D_f(z) = \frac{\max_\alpha |\partial_\alpha f(z)|}{\min_\alpha |\partial_\alpha f(z)|} = \frac{|f_z(z)| + |f_{\bar z}(z)|}{|f_z(z)| - |f_{\bar z}(z)|}$$

$$J_f(z) = \det(df(z)) = u_x v_y - u_y v_x \underset{(**)}{=} |f_z(z)|^2 - |f_{\bar z}(z)|^2 > 0$$

(**)
$$\left.\begin{aligned} f_z &= \tfrac{1}{2}(f_x - i f_y) = \tfrac{1}{2}(u_x + i v_x - i u_y + v_y)\\ 4|f_z|^2 &= (u_x+v_y)^2 + (v_x-u_y)^2 = u_x^2 + v_y^2 + v_x^2 + u_y^2 + 2u_x v_y - 2v_x u_y\\ f_{\bar z} &= \tfrac{1}{2}(f_x + i f_y) = \tfrac{1}{2}(u_x + i v_x + i u_y - v_y)\\ 4|f_{\bar z}|^2 &= (u_x - v_y)^2 + (v_x+u_y)^2 = u_x^2 + v_y^2 + v_x^2 + u_y^2 - 2u_x v_y + 2v_x u_y \end{aligned}\right\} -$$

$$\boxed{\begin{aligned} J_f &= (|f_z| - |f_{\bar z}|)(|f_z| + |f_{\bar z}|)\\ D_f &= \frac{|f_z| + |f_{\bar z}|}{|f_z| - |f_{\bar z}|} \quad \text{дилатација } f \text{ у } z\,! \end{aligned}}$$

(*)
$$|a+b| = |a| + |b| \Leftrightarrow (a+b)(\bar a + \bar b) = |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2$$
$$\Leftrightarrow \cancel{|a|^2} + \bar a b + a\bar b + \cancel{|b|^2} = \cancel{|a|^2} + 2|a||b| + \cancel{|b|^2}$$
$$\Leftrightarrow 2\operatorname{Re} a\bar b = 2|a||b|$$
$$\Leftrightarrow \operatorname{Re} a\bar b = |a||b|$$

$$a = |a|e^{i\alpha},\ b = |b|e^{i\beta} \qquad \alpha,\beta \in [0, 2\pi)$$
$$\operatorname{Re} |a|e^{i\alpha}|b|e^{-i\beta} = |a||b|$$
$$\Rightarrow \cos(\alpha-\beta) = 1 \Rightarrow \alpha = \beta$$

$$|a+b| = |a|-|b| \iff |a|\geq|b| \ \wedge \ (a+b)(\overline{a+b}) = |a|^2 - 2|a||b| + |b|^2$$

$$\iff |a|\geq|b| \ \wedge \ |a|^2 + a\bar{b} + \bar{a}b + |b|^2 = |a|^2 - 2|a||b| + |b|^2$$

$$\iff |a|\geq|b| \ \wedge \ 2\operatorname{Re} a\bar{b} = -2|a||b|$$

$$\iff |a|\geq|b| \ \wedge \ \operatorname{Re} a\bar{b} = -|a||b|$$

$$\operatorname{Re}|a||b|e^{i(\alpha-\beta)} = -|a||b|$$

$$\Rightarrow \cos(\alpha-\beta) = -1$$

$$\alpha-\beta = \pm\pi$$

$$\alpha = \beta\pm\pi \qquad \alpha,\beta\in[0,2\pi)$$

$a = f_z$, $b = f_{\bar{z}}e^{-2i\alpha}$

$\arg f_z = \varphi_1$, $\arg f_{\bar{z}} = \varphi_2$, $\varphi_1,\varphi_2\in[0,2\pi)$

$$|a+b| = |a|+|b| \iff \varphi_1 = \varphi_2 - 2\alpha + 2k\pi$$

$$\iff \alpha = \frac{\varphi_2-\varphi_1+2k\pi}{2}$$

$$\iff \alpha = \frac{\varphi_2-\varphi_1}{2} + k\pi$$ у овим правцу је max

$$|a+b| = |a|-|b| \iff \varphi_1 = \varphi_2 - 2\alpha \pm\pi + 2k\pi$$

$$\iff \alpha = \frac{\varphi_2-\varphi_1\pm\pi+2k\pi}{2}$$

$$\iff \alpha = \frac{\varphi_2-\varphi_1}{2} \pm \frac{\pi}{2} + k\pi$$ у овом правцу је min

Очигледно је да су правци ортогонални!

$$\boxed{\begin{array}{ll} \max: & \alpha = \frac{1}{2}\arg\frac{f_{\bar{z}}}{f_z} + k\pi \\ \min: & \alpha = \frac{1}{2}\arg\frac{f_{\bar{z}}}{f_z} \pm\frac{\pi}{2} + k\pi \end{array}}$$

Ако посматрамо $df(z): \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$df(z)h = h'$$

$$h = (h_1,h_2), \quad h' = (h_1', h_2')$$

Ако је $df(z) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = J$, $J^{-1} = \frac{1}{\det df(z)} \cdot \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \quad (h_1,h_2) = \frac{1}{\det df(z)} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1' \\ h_2' \end{bmatrix}$$

$$(h_1,h_2) = \frac{1}{Jf}\left(a_{22}h_1' - a_{12}h_2',\ -a_{21}h_1' + a_{11}h_2'\right)$$

Ако $h_1^2+h_2^2=1 \Rightarrow \frac{1}{(Jf)^2}\left[(a_{22}h_1'-a_{12}h_2')^2+(-a_{21}h_1'+a_{11}h_2')^2\right]=1$

овде се добија једначина елипсе!

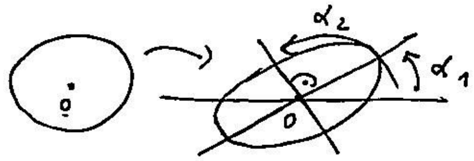
$Ah_1'^2+Bh_2'^2=1$ (после ротације се добија овај облик)

Дакле $df(z)$ слика кружнице у елипсе!

($Jf>0$, па и $Jf\neq 0$)

(f C^1 дифеоморфизам који чува оријентацију)

$$df(z)(e^{i\alpha}) = (f_z(z)\,dz + f_{\bar z}(z)\,d\bar z)(e^{i\alpha})$$
$$= f_z(z)\cdot e^{i\alpha} + f_{\bar z}(z)e^{-i\alpha}$$



$\max |df(z)(e^{i\alpha})|$ се достиже за $\alpha_1 = \frac{1}{2}\arg\frac{f_{\bar z}}{f_z}$, а $\min$ за $\alpha_2 = \frac{1}{2}\arg\frac{f_{\bar z}}{f_z}+\frac{\pi}{2}$

дужина велике полуосе је $|f_z(z)|+|f_{\bar z}(z)| = \max_\alpha |df(z)(e^{i\alpha})| =: \Lambda f(z)$

а дужина мале полуосе је $|f_z(z)|-|f_{\bar z}(z)| = \min_\alpha |df(z)(e^{i\alpha})| =: \lambda f(z)$

Дакле, са новим ознакама је: $Df(z) = \frac{\Lambda f(z)}{\lambda f(z)}$ и ако означимо $Mf(z) = \frac{f_{\bar z}(z)}{f_z(z)}$

КОМПЛЕКСНА ДИЛАТАЦИЈА

Онда је $Df(z) = \frac{1+|Mf(z)|}{1-|Mf(z)|}$.

$\alpha_1 = \frac{1}{2}\arg Mf(z)$

$\alpha_2 = \frac{1}{2}\arg Mf(z) + \frac{\pi}{2}$

деф: f C^1 дифеоморфизам, f чува оријентацију, $f:\Omega\to\Omega'$, $\Omega,\Omega'\subseteq\mathbb{C}$ области

Ако је $D_f(z)=\dfrac{|f_z(z)|+|f_{\bar z}(z)|}{|f_z(z)|-|f_{\bar z}(z)|}$ ограничено на Ω,

кажемо да је f квазиконформно на Ω. ($\sup\limits_{z\in\Omega} D_f(z)<\infty$)

Ако је $D_f\le K$ на Ω, онда кажемо да је f K-квазиконформно.

(каже се и регуларно K-квазиконф. јер се овде тр. диференцијабилност – постоји и општија деф – касније ћемо о њој)

Напомене: 1) $\mu_f=\dfrac{f_{\bar z}}{f_z}$, $D_f=\dfrac{1+|\mu_f|}{1-|\mu_f|}$

$$D_f\le K \iff \frac{1+|\mu_f|}{1-|\mu_f|}\le K$$
$$\iff 1+|\mu_f|\le K-K\cdot|\mu_f|$$
$$\iff |\mu_f|(1+K)\le K-1$$
$$\iff |\mu_f|\le\frac{K-1}{K+1}=:k,\quad \underline{k<1} \text{ (мало } k)$$

2) $K\geq 1$ очигледно
за $K=1$ је $|f_{\bar z}|=0$
тј. f је аналитичка
и пошто је хомеом.
онда је и конформно.

3) Из претходне приче смо добили да $df(z)$ $(z\in\Omega)$ слика кружнице из тангентног простора T_z у елипсе у танг. простору $T_{f(z)}$ тако да су велика и мала полуоса $\Lambda_f=|f_z|+|f_{\bar z}|$ и $\lambda_f=|f_z|-|f_{\bar z}|$ и да је правац велике полуосе одређен углом $\alpha=\frac{1}{2}\arg\mu_f$ (max истезање), а правац мале полуосе је нормалан на њега тј. одређен углом $\beta=\alpha+\frac{\pi}{2}$.