* Главна вредност несвојственог интеграла

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

ПП: 1) f није ограничена на сегменту $[a,b]$ и то само у околини $c \in (a,b)$

2) f је Риман интеграбилна на сваком подсегменту $[a_k,b_k] \subseteq [a,b]$ тд. $c \notin [a_k,b_k]$.

Ако постоје граничне вредности

$$\lim_{\varepsilon_1 \to 0^+} \int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)\,dx \quad \text{и} \quad \lim_{\varepsilon_2 \to 0^+} \int_{c+\varepsilon_2}^{b} f(x)\,dx,$$

(када ε_1 и ε_2 независно теже ка 0^+),

збир

$$\lim_{\varepsilon_1 \to 0^+} \int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)\,dx + \lim_{\varepsilon_2 \to 0^+} \int_{c+\varepsilon_2}^{b} f(x)\,dx \qquad (*)$$

представља вредност несвојственог интеграла.

Може се десити да $(*)$ не постоји, али да постоји гранична вредност

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \left(\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx \right)$$

Тада кажемо да несвојствени интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ постоји у смислу главне вредности.

Добијена гранична вредност се назива

ГЛАВНА ВРЕДНОСТ НЕСВОЈСТВЕНОГ ИНТЕГРАЛА

(или Кошијева главна вредност) и означава

$$\text{v.p.} \int_a^b f(x)\,dx \qquad (\text{v.p.} = \text{valeur principale})$$

* Ако постоји $\int_a^b f(x)\,dx$, онда следи да постоји $\text{v.p.}\int_a^b f(x)\,dx$, а обратно не важи.

Слично:

$$\text{v.p.}\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} f(x)dx$$ ако су a и b сингуларитети

и $$\text{v.p.}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{r\to+\infty}\int_{-r}^{r} f(x)dx.$$

Примери: $a<c<b$

1) $$\int_a^b \frac{1}{x-c}dx = \int_a^c \frac{1}{x-c}dx + \int_c^b \frac{1}{x-c}dx$$

није конвергентан!

али: $$\text{v.p.}\int_a^b \frac{1}{x-c}dx = \log\frac{b-c}{c-a}$$ (ПРОВЕРИТЕ!)

2) $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin x\, dx$ дивергира, али

$$\text{v.p.}\int_{-\infty}^{+\infty} \sin x\, dx = 0$$

3) $$\text{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+x}{1+x^2}dx = \pi$$

Појавило се на вежбама: $\int_0^{+\infty}\frac{dt}{t^2-1}$ дивергира (проблем у 1)

али $$\text{v.p.}\int_0^{+\infty}\frac{dt}{t^2-1} = 0$$

(појавило се у решењу задатка $\int_0^{+\infty}\frac{\log t}{t^2-1}dt$)
