$\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ Риманова сфера

(2) (Одавде ћете видети како долазимо до сферне метрике)

Нека је $S^2 = \{ p = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \}$.

Ако је $\varphi_N : S^2 \to \overline{\mathbb{C}}$ стереографска пројекција (тачки $p \in S^2$ додељује тачку из $\mathbb{R}^2$ која се добија у пресеку праве кроз $N(0,0,1) \in S^2$ и p са равни Oxy. Због $\mathbb{C} \approx \mathbb{R}^2$ поистовећујемо $(x, y, 0)$ и $z = x + iy$)

а) Ако је $p = (x_1, x_2, x_3)$ и $z = \varphi_N(p)$, доказати:

$$x_1 = \frac{z + \bar{z}}{1 + |z|^2}, \quad x_2 = \frac{z - \bar{z}}{i(1 + |z|^2)}, \quad x_3 = \frac{|z|^2 - 1}{1 + |z|^2}, \quad z = \frac{x_1 + i x_2}{1 - x_3}$$

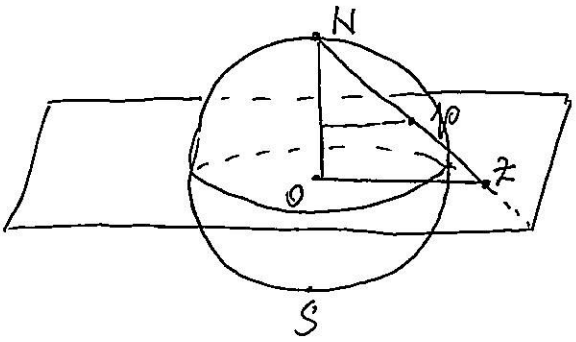
б) Ако је $\sigma : \overline{\mathbb{C}}^2 \to \mathbb{R}$ дато са $\sigma(z_1, z_2) = |p_1 - p_2|$, где су p_1 и p_2 тачке из S^2 т.д. $\varphi_N(p_1) = z_1$ и $\varphi_N(p_2) = z_2$, доказати:

$$\sigma(z_1, z_2) = \frac{2|z_1 - z_2|}{\sqrt{1 + |z_1|^2}\sqrt{1 + |z_2|^2}}, \quad \sigma(z, \infty) = \frac{2}{\sqrt{1 + |z|^2}}$$

$$\sigma\left(\frac{1}{z_1}, \frac{1}{z_2}\right) = \sigma(z_1, z_2)$$

($|\cdot|$ је еуклидска метрика у $\mathbb{R}^3$)

в) Наћи $\varphi_S : S^2 \to \overline{\mathbb{C}}$ ако је φ_S такође стереографска пројекција, али из тачке $S(0,0,-1)$.



права кроз N и p: $(N = (0,0,1),\ p = (x_1, x_2, x_3))$

$$\frac{X - 0}{x_1 - 0} = \frac{Y - 0}{x_2 - 0} = \frac{Z - 1}{x_3 - 1} = k \quad (X, Y, Z) \in \mathbb{R}^3, \ k \in \mathbb{R}$$

$$\left.\begin{aligned} X &= k x_1 \\ Y &= k x_2 \\ Z &= k(x_3 - 1) + 1 \end{aligned}\right\}$$ ова права садржи тачку $z = (x, y, 0)$

$\Downarrow$

$$x = k x_1$$
$$y = k x_2$$
$$0 = k(x_3 - 1) + 1$$

$$k = \frac{1}{1 - x_3}$$

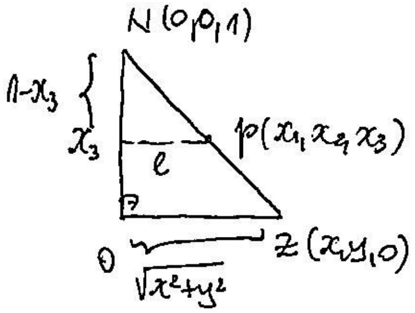
$$y = \frac{x_2}{1 - x_3}$$

$$x = \frac{x_1}{1 - x_3}$$

$\varphi_N(S) = 0$

$\varphi_N(N) = \infty$

$$\varphi_N(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{x_1}{1 - x_3}, \frac{x_2}{1 - x_3}, 0\right) \Rightarrow z = \frac{x_1 + i x_2}{1 - x_3}$$



сличности :
$$\frac{1-x_3}{1} = \frac{\sqrt{x_1^2+x_2^2+(x_3-1)^2}}{\sqrt{x^2+y^2+1}} = \frac{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$l = \sqrt{x_1^2+x_2^2+(x_3-x_3)^2} = \sqrt{x_1^2+x_2^2}$$

$$|z|^2 = x^2+y^2$$

$$\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2-2x_3+1} = \sqrt{|z|^2+1}\cdot(1-x_3)$$

$$\sqrt{2(1-x_3)} = \sqrt{|z|^2+1}\cdot(1-x_3) \quad /^2$$

$$2(1-x_3) = (1+|z|^2)(1-x_3)^2$$

$$2 = (1+|z|^2)(1-x_3)$$

$$1-x_3 = \frac{2}{1+|z|^2}$$

$$x_3 = 1-\frac{2}{1+|z|^2} = \frac{|z|^2-1}{1+|z|^2}$$

$$z = \frac{x_1+ix_2}{1-x_3} = \frac{x_1+ix_2}{\frac{2}{1+|z|^2}}$$

$$z = (1+|z|^2)\,\frac{x_1+ix_2}{2}$$

$$x_1+ix_2 = \frac{2z}{1+|z|^2} = \frac{2x}{1+|z|^2} + i\cdot\frac{2y}{1+|z|^2}$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{2x}{1+|z|^2} = \frac{2\cdot \mathrm{Re}\, z}{1+|z|^2} = \frac{z+\bar{z}}{1+|z|^2}$$

$$x_2 = \frac{2y}{1+|z|^2} = \frac{2\,\mathrm{Im}\, z}{1+|z|^2} = \frac{z-\bar{z}}{i(1+|z|^2)}$$

в) права кроз $S(0,0,-1)$ и $p(x_1,x_2,x_3)$:

$$\frac{X-0}{x_1-0} = \frac{Y-0}{x_2-0} = \frac{Z+1}{x_3+1} = k \qquad (X,Y,Z)\in\mathbb{R}^3,\ k\in\mathbb{R}$$

$$\varphi_S(N) = 0$$

$X = kx_1$

$Y = kx_2$

$Z = k(x_3+1)-1$

$$\varphi_S(x_1,x_2,x_3) = \left(\frac{x_1}{1+x_3}, \frac{x_2}{1+x_3}, 0\right), \ \varphi_S(S) = \infty$$

Пресек праве и равни Oxy : $X=x,\ Y=y,\ Z=0 \Rightarrow k = \frac{1}{1+x_3},\ x = \frac{x_1}{1+x_3}$

$$y = \frac{x_2}{1+x_3}$$

δ) $\sigma(z_1, z_2) = |p_1 - p_2|$

$p_1 = (x_1, x_2, x_3)$, $p_2 = (x_1', x_2', x_3')$ $\varphi_N(p_1) = z_1$, $\varphi_N(p_2) = z_2$

$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$, $x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 = 1$

$$\sigma(z_1, z_2) = \sqrt{(x_1 - x_1')^2 + (x_2 - x_2')^2 + (x_3 - x_3')^2} = \sqrt{2 - 2(x_1 x_1' + x_2 x_2' + x_3 \cdot x_3')}$$

$$= \sqrt{2 - 2\left(\frac{z_1 + \bar{z}_1}{1+|z_1|^2} \cdot \frac{z_2 + \bar{z}_2}{1+|z_2|^2} + \frac{z_1 - \bar{z}_1}{i(1+|z_1|^2)} \cdot \frac{z_2 - \bar{z}_2}{i(1+|z_2|^2)} + \frac{|z_1|^2 - 1}{1+|z_1|^2} \cdot \frac{|z_2|^2 - 1}{1+|z_2|^2}\right)}$$

$$= \sqrt{2 - 2\left(\frac{\cancel{z_1 z_2} + \bar{z}_1 z_2 + z_1 \bar{z}_2 + \cancel{\bar{z}_1 \bar{z}_2} - (\cancel{z_1 z_2} - \bar{z}_1 z_2 - z_1 \bar{z}_2 + \cancel{\bar{z}_1 \bar{z}_2}) + |z_1|^2 |z_2|^2 - |z_1|^2 - |z_2|^2 + 1}{(1+|z_1|^2)(1+|z_2|^2)}\right)}$$

$$= \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{\cancel{1} + |z_1|^2 + |z_2|^2 + \cancel{|z_1|^2 |z_2|^2} - 2\bar{z}_1 z_2 - 2 z_1 \bar{z}_2 - \cancel{|z_1|^2 |z_2|^2} + |z_1|^2 + |z_2|^2 - \cancel{1}}{(1+|z_1|^2)(1+|z_2|^2)}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{(1+|z_1|^2)(1+|z_2|)^2}} \cdot \sqrt{(|z_1|^2 + |z_2|^2 - z_1 \bar{z}_2 - \bar{z}_1 z_2) 2} = \frac{2\,|z_1 - z_2|}{\sqrt{(1+|z_1|^2)(1+|z_2|^2)}}$$

jep $|z_1 - z_2|^2 = |z_1|^2 - z_1 \bar{z}_2 - \bar{z}_1 z_2 + |z_2|^2$

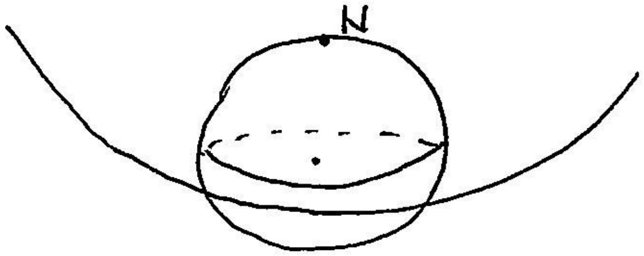
$\sigma(z, \infty) = |p_1 - p_2|$ $\varphi_N(p_1) = z$, $\varphi_N(p_2) = \infty$ $p_2 = N = (0, 0, 1)$

$$\sigma(z, \infty) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + (x_3 - 1)^2} = \sqrt{1 - 2x_3 + 1} = \sqrt{2 - 2x_3} = \sqrt{2}\sqrt{1 - x_3}$$

$$= \sqrt{2}\sqrt{\frac{2}{1+|z|^2}} = \frac{2}{\sqrt{1+|z|^2}}$$

$$\sigma\left(\frac{1}{z_1}, \frac{1}{z_2}\right) = \frac{2\left|\frac{1}{z_1} - \frac{1}{z_2}\right|}{\sqrt{\left(1 + \frac{1}{|z_1|^2}\right)\left(1 + \frac{1}{|z_2|^2}\right)}} = \frac{\frac{2\,|z_2 - z_1|}{\cancel{|z_1 z_2|}}}{\frac{\sqrt{1+|z_1|^2}\,\sqrt{1+|z_2|^2}}{\cancel{|z_1 z_2|}}} = \sigma(z_1, z_2)$$

③ Доказати да је стереографска пројекција рестрикција инверзије у односу на сферу са центром N и полупречником $\sqrt{2}$.



$$d(N,(x_1,x_2,x_3))\cdot d(N,(x,y,0)) \overset{?}{=} (\sqrt{2})^2$$

(са ознакама из претходног зад.)

$N=(0,0,1)$

$$\sqrt{x_1^2+x_2^2+(x_3-1)^2}\cdot\sqrt{x^2+y^2+1} \underset{?}{=} 2$$

$$z=x+iy \quad x=\frac{x_1}{1-x_3},\ y=\frac{x_2}{1-x_3},\ x_1^2+x_2^2+x_3^2=1$$

$$\sqrt{1-2x_3+1}\cdot\sqrt{\left(\frac{x_1}{1-x_3}\right)^2+\left(\frac{x_2}{1-x_3}\right)^2+1}=2$$

$$\sqrt{2-2x_3}\cdot\sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2+(1-x_3)^2}{(1-x_3)^2}}=2$$

$$\sqrt{2}\cancel{\sqrt{1-x_3}}\cdot\sqrt{\frac{2\cancel{(1-x_3)}}{\cancel{(1-x_3)^2}}}=2$$

$$2=2 \quad \checkmark$$

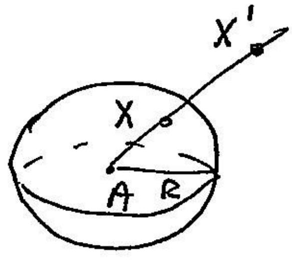
Још:

$\varphi_N(p)=z$

N, p и z колинеарне и p и z са исте стране тачке N ?

* Инверзија у односу на сферу $S(A,R)$:

$$f(x,y,z)=(x',y',z') \qquad f(X)=X'$$



$$d((x,y,z),A)\cdot d((x',y',z'),A)=R^2$$

за $A=(0,0,0)$ и $R=1$

$$\sqrt{x^2+y^2+z^2}\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}=1$$

$$|X|\cdot|X'|=1$$

A, X и X' колинеарне

X и X' са исте стране A

$x'=\lambda x,\ y'=\lambda y,\ z'=\lambda z$

$$\lambda\cdot|X|^2=1 \Rightarrow \lambda=\frac{1}{|X|^2} \Rightarrow X'=\frac{X}{|X|^2}$$