1. (25 поена)

(а) Доказати да је $x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x$ за свако $x > 0$.

(б) Израчунати $\lim\limits_{n\to\infty} (\sin\frac{1}{n^2} + \sin\frac{2}{n^2} + ... + \sin\frac{n}{n^2})$.

а) $\sin x < x \,,\; x > 0$

$$F(x) = \sin x - x$$

$$\left.\begin{array}{l} F'(x) = \cos x - 1 \leq 0 \Rightarrow F \searrow \\ \text{и } F(0) = 0 \end{array}\right\} \sin x < x, \ \forall x > 0$$

$$\sin x > x - \frac{x^3}{6}$$

$$F(x) = \sin x - x + \frac{x^3}{6}$$

$$\left.\begin{array}{l} F'(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2} \overset{?}{\geq} 0 \rightarrow F \nearrow \\ F(0) = 0 \end{array}\right\} \sin x - x + \frac{x^3}{6} > 0 \text{ тј. } \sin x > x - \frac{x^3}{6} \text{ за } x > 0$$

Доказ ?: $G(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2}$

$G'(x) = -\sin x + x \Rightarrow G'(x) > 0 \iff -\sin x + x > 0$

$\iff \sin x < x$ ✓

$$\left.\begin{array}{l} \rightarrow G' > 0 \Rightarrow G \nearrow \\ G(0) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow G(x) > 0 \text{ за } x > 0$$

б) искористићемо део а)

$$\sin\frac{1}{n^2} + \sin\frac{2}{n^2} + ... + \sin\frac{n}{n^2} < \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n^2}(1 + \dots + n) = \frac{n(n+1)}{2n^2}$$

$$\sin\frac{1}{n^2} + \sin\frac{2}{n^2} + ... + \sin\frac{n}{n^2} > \frac{1}{n^2} - \frac{1}{6}\left(\frac{1}{n^2}\right)^3 + \frac{2}{n^2} - \frac{1}{6}\left(\frac{2}{n^2}\right)^3 + \dots + \frac{n}{n^2} - \frac{1}{6}\left(\frac{n}{n^2}\right)^3$$

$$= \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n}{n^2} - \frac{1}{6}\left[\frac{1^3}{n^6} + \frac{2^3}{n^6} + \dots + \frac{n^3}{n^6}\right]$$

$$= \frac{n(n+1)}{2n^2} - \frac{1}{6}\,\frac{1^3 + 2^3 + \dots + n^3}{n^6}$$

Добили смо: $\underbrace{\frac{n(n+1)}{2n^2}}_{\to 1/2} - \frac{1}{6}\underbrace{\frac{1^3 + 2^3 + \dots + n^3}{n^6}}_{\to 0} < \overbrace{\sin\frac{1}{n^2} + \sin\frac{2}{n^2} + \dots + \sin\frac{n}{n^2}}^{a_n} < \underbrace{\frac{n(n+1)}{2n^2}}_{\to 1/2}$

Штолц: проверите

Т.о 2 полицаја $\Rightarrow a_n \xrightarrow{n\to\infty} 1/2$

2. (25 поена) Израчунати $\lim_{x\to 0} \frac{x\sin(\operatorname{arctg} x) - x^2}{2\cos x - 2 + x^2} = \circledast$

$\operatorname{arctg} x = x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3) \rightsquigarrow$ како ово видимо?

$f(x) = \operatorname{arctg} x$

$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)x^2}{2!} + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + o(x^3)$

Једноставан рачун $\rightsquigarrow$ $f(0)=0$, $f'(0)=1$, $f''(0)=0$, $f'''(0)=-2$ — за вежбу

$\sin(\underbrace{\operatorname{arctg} x}_{\to 0}) = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3) - \frac{1}{6}\left(x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right)^3 + o(\dots)^3$

$\left[\sin t = t - \frac{t^3}{6} + o(t^3),\ t\to 0\right]$

$= x - \frac{x^3}{3} + o(x^3) - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$

$= x - \frac{x^3}{2} + o(x^3)$

$2\cos x = 2\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)\right)$

$$\circledast = \lim_{x\to 0} \frac{\overbrace{x\left(x - \frac{x^3}{2} + o(x^3)\right)}^{x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4)} - x^2}{2 - x^2 + \frac{x^4}{12} + o(x^4) - 2 + x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{x^4}{2} + o(x^4)}{\frac{x^4}{12} + o(x^4)} = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{1}{12}} = \boxed{-6}$$

3. (25 поена) Испитати ток и скицирати график функције $f(x) = \ln(|x^2 - 4x + 3|)$.

1° Домен

$|x^2 - 4x + 3| > 0 \longrightarrow x^2 - 4x + 3 \neq 0$

$(x-3)(x-1) \neq 0$

$\longrightarrow D_f: (-\infty, 1) \cup (1, 3) \cup (3, +\infty)$

2° Парност/непарност ✗

3° Нуле и знак

$f(x) = 0 \iff |x^2 - 4x + 3| = 1$

$\iff x^2 - 4x + 3 = 1 \quad \vee \quad x^2 - 4x + 3 = -1$

$\iff x^2 - 4x + 2 = 0 \quad \vee \quad x^2 - 4x + 4 = 0$

$x_{1/2} = \frac{4 \pm \sqrt{16-8}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 2 \pm \sqrt{2} \quad \vee \quad x = 2$

Можемо већ овде видети и знак ф-је → пробајте за вежбу
али ћемо знак на крају

4°) асимптотика

$x \to +\infty \quad f(x) \sim 2\ln|x| \to$ нема х.а. (слично за $-\infty$)

косе?

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{\ln|x^2-4x+3|}{x} \overset{\text{лопитал}}{=} 0$$

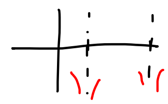
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - kx = \ln|x^2-4x+3| - x = -\infty$$

слично за $x \to -\infty$

→ нема ни х.а ни к.а.

вертикалне?

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \ln|x^2-4x+3| = -\infty$$



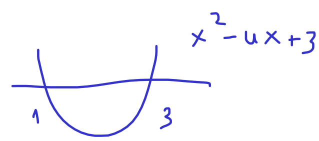
$$\lim_{x\to 3} f(x) = -\infty$$

(Могли смо свакако гледати леви и десни лимес → али добије се исто :))

5°) f' и монотоност

$$\left[\left(\ln|t(x)|\right)' = \frac{t'(x)}{t(x)}, \text{ за } t(x) \neq 0 \right]$$

$$f'(x) = \frac{2x-4}{x^2-4x+3}$$



		1		2		3	
$2x-4$	$-$		$-$		$+$		$+$
x^2-4x+3	$+$		$-$		$-$		$+$
f'	$-$		$+$		$-$		$+$
f	↘		↗		↘		↗

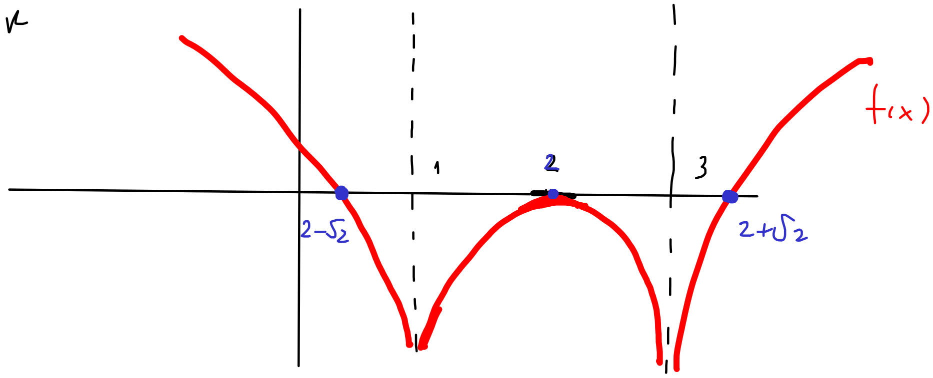
→ 2 лок максимум

6°) $f'' \overset{\dots}{=} -2\dfrac{x^2+4x-5}{(x^2-4x+3)^2}$ за вежбу

→ $f'' < 0$ за свако x из домена → ф-ја је конкавна $\cap$ на целом домену

7°) нуле / знак ✓

ђ) График



Знак: лако ✓

...

Завршити за вежбу

4. (25 поена) Израчунати $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x(x^8+2x^4+1)}\,dx = I$

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{x^3}{x^4(x^4+1)^2}\,dx = \left| \begin{matrix} t = x^4 & \big| \, d \\ dt = 4x^3 dx & \end{matrix} \right| = \frac{1}{4}\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t(t+1)^2} = \frac{1}{4}\lim_{\beta\to+\infty}\int_1^{\beta} \frac{dt}{t(t+1)^2} = (*)$$

$$\frac{1}{t(t+2)^2} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t+2} + \frac{C}{(t+2)^2}$$

$$\longrightarrow 1 = A(t^2+2t+1) + B(t^2+2t) + Ct \qquad \forall t$$

$$t = -1 \longrightarrow 1 = -1\cdot C \longrightarrow \boxed{C = -1}$$

$$t = 0 \longrightarrow \boxed{1 = A}$$

$$\text{уз } t^2:\ 0 = A + B \longrightarrow \boxed{B = -1}$$

$$(*) = \frac{1}{4}\lim_{\beta\to+\infty}\left(\ln|t| - \ln|t+1| + \frac{1}{t+1}\right)\Bigg|_1^{\beta} =$$

$$= \frac{1}{4}\lim_{\beta\to+\infty}\left(\ln\beta - \ln(\beta+1) + \frac{1}{\beta+1} - \ln 1 + \ln 2 - \frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\lim_{\beta\to+\infty}\Bigg(\underbrace{\ln\left(\frac{\beta}{\beta+1}\right) + \frac{1}{\beta+1}}_{\to 0} + \ln 2 - \frac{1}{2}\Bigg) = \frac{1}{4}\left(\ln 2 - \frac{1}{2}\right) = \boxed{\frac{1}{8}(\ln 4 - 1)}$$

5. (25 поена) Наћи опште решење диференцијалне једначине $xy' = y^2 - (2x+1)y + x^2 + 2x$, ако је познато да је једно партикуларно решење облика $y_p = ax + b$, где су $a, b \in \mathbb{R}$.

$\longrightarrow$ Рикатијева

Заменим y_p у ДЈ

$$xa = (ax+b)^2 - (2x+1)(ax+b) + x^2 + 2x$$

$$xa = a^2x^2 + 2abx + b^2 - 2ax^2 - 2bx - ax - b + x^2 + 2x$$

$$xa = (1-a^2)x^2 + (2ab - 2b - a + 2)x + b^2 - b$$

$1 - a^2 = 0 \longrightarrow a = \pm 1$

$2ab - 2b - a + 2 = a \longrightarrow ab - b - a = -1$ (*)

$b^2 - b = 0 \longrightarrow b = 0 \lor b = 1$

Не морамо до краја решавати, треба нам само једно партикуларно

нпр: $b = 0 \rightarrow -a = -1 \rightarrow \boxed{a = 1} \longrightarrow y_p = x$

Смена: $y = y_p + \frac{1}{z} \rightarrow y' = 1 - \frac{z'}{z^2}$ (алтернативна смена: $y = y_p + z$)

$$x\left(1 - \frac{z'}{z^2}\right) = \left(x + \frac{1}{z}\right)^2 - (2x+1)\left(x + \frac{1}{z}\right) + x^2 + 2x$$

$$x - x\frac{z'}{z^2} = x^2 + \frac{2x}{z} + \frac{1}{z^2} - 2x^2 - \frac{2x}{z} - x - \frac{1}{z} + x^2 + 2x$$

$$-x\frac{z'}{z^2} = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z} \quad \Big/ \cdot \frac{(-z^2)}{x}$$

$\longrightarrow z' = -\frac{1}{x} + \frac{z}{x} \longrightarrow z' = \frac{z-1}{x}$ Ј-на која раздваја пром.

$z \neq 1$

$\longrightarrow \frac{dz}{z-1} = \frac{dx}{x} \longrightarrow |z-1| = c|x|$

тј $z - 1 = cx, \ c \neq 0$

$\longrightarrow z = 1 \rightarrow y = y_p + \frac{1}{z} = x + 1$ реше решење (провери се лако)

$\longrightarrow z - 1 = cx, \ c \in \mathbb{R}$

Вратимо смену $\longrightarrow y = x + \frac{1}{1 + cx}, \ c \in \mathbb{R}$

Опште решење: $y = x + \frac{1}{1+cx}, \ y = x,$