1 час, Фуријеова трансформација и интеграл

1. Наћи Фуријеову трансформацију функције $f(x) = e^{-a|x|}$, $a > 0$.

Функција задовољава Дирихлеове услове и апсолутно је интеграбилна на реалној правој ($\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| = 2\int_0^{\infty} e^{-ax} = \frac{2}{a}$). $F(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\lambda x}dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty} e^{-ax}\cos\lambda x dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{a}{a^2+\lambda^2}$.

2. Представити у форми Фуријеовог интеграла функцију

$$f(x) = \begin{cases} x, & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$$

Функција је дефинисана на реалној оси, део-по-део монотона, има две тачке прекида 1. реда и апсолутно је интеграбилна $\int\limits_{-\infty}^{infty} |f(x)|dx = \int\limits_{-1}^{1} |x|dx = x^2|_0^1 = 1$. Дакле, функција се може представити Фуријеовим интегралом. Функција је непарна, па је $a(\lambda) = 0$; $b(\lambda) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} f(t)\sin\lambda t = \frac{2}{\pi\lambda^2}(\sin\lambda - \lambda\cos\lambda)$. У тачкама непрекидности (за $x \neq \pm 1$) је $f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{1}{\lambda^2}(\sin\lambda - \lambda\cos\lambda)\sin(\lambda x)d\lambda$, а у тачкама прекида $x = \pm 1$ је $\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{1}{\lambda^2}(\sin\lambda - \lambda\cos\lambda)\sin(\lambda x)d\lambda = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$.